Vorlesungsergänzung zur Ingenieur-Mathematik I

Zum Fundamentalsatz der Algebra und zu Nullstellenschranken für Polynome

Ein elementarer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra mit den Mitteln der Anfänger-Analysis

R. Brigola

Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass jedes nicht-konstante, komplexe Polynom mindestens eine komplexe Nullstelle besitzt. Die erste Erwähnung des Fundamentalsatzes wurde 1608 formuliert von Peter Roth in Nürnberg. Der Satz wurde angegeben von Descartes 1637, der auch zwischen reellen und komplexen Nullstellen unterschied, mit einem noch lückenhaften Beweis von D'Alembert 1746 veröffentlicht, und von C.F. Gauss 1797 in dessen Dr.-Arbeit. Gauss publizierte vier überarbeitete Beweise dieses grundlegenden Resultats, den letzten 1849. Heute gibt es eine Vielzahl verschiedener Beweise dieses Theorems, unterschiedlich in der Zugangsweise und mit unterschiedlichen Voraussetzungen an den Leser über zugrunde liegende mathematische Teilgebiete (siehe etwa B. Fine, G. Rosenberger The Fundamental Theorem Of Algebra, Springer-Verlag).

Wir verwenden für die folgende Darstellung nur Argumente der üblichen Anfängeranalysis des ersten Semesters. Sie sind im ersten Hilfssatz dem Buch Analysis I von K. Königsberger ([1]) entnommen und folgen im Hauptteil Arbeiten meines Kollegen H. Leinfelder ([2] und [3]) und einer privaten Mitteilung von ihm aus dem Jahr 2008 [4]. Einen weiteren sehr einfachen und kurzen Beweis, ebenfalls von H. Leinfelder, findet man im Lehrbuch *Fourier-Analysis und Distributionen* des Autors [7].

Im Folgenden bezeichnet $P(z) = z^n + q(z), \quad q(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ für $n \geq 1$ ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$. (Für den Koeffizienten a_n von z^n können wir beim Nullstellenproblem ohne Einschränkung der Allgemeinheit $a_n = 1$ annehmen.)

Hilfssatz. *Es gibt eine reelle Zahl $r > 0$, so dass für $z \in \mathbb{C}$ außerhalb der offenen Kreisscheibe $K_r(0)$ um Null mit Radius r gilt*

$$|P(z)| \geq r.$$

Beweis: Man setze $r = 1 + |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \ldots + |a_0|$ und betrachte z mit $|z| \geq r \geq 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
|q(z)| &\leq |z|^{n-1} \left(|a_{n-1}| + \frac{|a_{n-2}|}{|z|} + \ldots + \frac{|a_0|}{|z|^{n-1}} \right) \\
&\leq |z|^{n-1} (r-1) \leq |z|^{n-1}(|z|-1).
\end{aligned}$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt nun für $|P(z)|$, $|z| \geq r$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|P(z)| &= |z^n + q(z)| \geq |z|^n - |q(z)| \geq |z|^n - |z|^{n-1}(|z|-1) \\
&= |z|^{n-1} \geq r \geq 1.
\end{aligned}$$

Folgerung. *Die stetige Funktion $|P|$ hat in der abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{K_r(0)}$ ein Minimum, das wegen $|P(0)| = |a_0| < r$ im Inneren dieser Kreisscheibe liegt und auch Minimum von $|P|$ auf ganz $\mathbb{C}$ ist.*

Fundamentalsatz der Algebra.
Jedes nicht-konstante Polynom P hat in $\mathbb{C}$ mindestens eine Nullstelle.

Beweis: (H.Leinfelder [4]) z_0 sei Minimalstelle von $|P|$ in $K_r(0)$, r wie im Hilfssatz oben gewählt. Wir können o.E.d.A. annehmen, dass $z_0 = 0$ ist (ggf. erreicht man dies durch die Koordinatentransformation $z \to z - z_0$).
Sei nun also

$$P(z) = a_0 + a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \ldots + a_n z^n$$

mit $a_k \neq 0$, $P(0) = a_0$ und $z_0 = 0$ Minimalstelle von $|P|$. Dabei bezeichne k den ersten positiven Index m, für den $a_m \neq 0$ ist. Er existiert, da P nach Voraussetzung nicht-konstant ist. Wir zeigen nun, dass $P(0) = a_0 = 0$ gilt:
Im Weiteren seien dazu $w \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $|w| = 1$ und für $t \geq 0$

$$f(t) = |P(tw)|^2 = P(tw)\overline{P(tw)}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
&f(t) - f(0) = \\
&\left(a_0 + a_k t^k w^k + a_{k+1} t^{k+1} w^{k+1} + \ldots + a_n t^n w^n\right) \cdot \left(\overline{a_0} + \overline{a_k} t^k \overline{w}^k + \overline{a_{k+1}} t^{k+1} \overline{w}^{k+1} + \ldots + \overline{a_n} t^n \overline{w}^n\right) - a_0 \overline{a_0} \\
&= \left(\overline{a_0} a_k w^k + a_0 \overline{a_k}\, \overline{w}^k\right) t^k + t^{k+1} Q(t)
\end{aligned}$$

mit einem reellen Restpolynom Q.
Also

$$f(t) - f(0) = 2\Re(a_0 \overline{a_k}\, \overline{w}^k) t^k + t^{k+1} Q(t).$$

Weil f in $t = 0$ lokal minimal ist, gilt für hinreichend kleine $t > 0$

$$0 \leq \frac{f(t) - f(0)}{t^k} = 2\Re(a_0 \overline{a_k}\, \overline{w}^k) + tQ(t).$$

Mit $t \to 0$ folgt

$$0 \leq 2\Re(a_0 \overline{a_k}\, \overline{w}^k).$$

Dies gilt *für alle* $w \in \mathbb{C}$, $|w| = 1$. Da $a_k \neq 0$ ist und die Multiplikation mit w^k eine Drehung im Argument der rechten Seite bewirkt, könnte für passendes w die rechte Seite aber auch kleiner als Null werden, falls $a_0 \neq 0$ wäre. Das wäre ein Widerspruch. Daher muss $a_0 = P(0) = 0$ sein.

Anmerkungen. 1) Linearfaktorzerlegung für ein Polynom P vom Grad $n > 1$ mit der Nullstelle z_0 in $P(z) = (z - z_0)R_{n-1}(z)$ und Anwendung des Fundamentalsatzes auf das Restpolynom R_{n-1} vom Grad $n - 1$ usw. ergibt: P *hat genau* n *(nicht notwendig verschiedene) Nullstellen.*

2) Für eine Nullstelle z_0 von P und k_0 das erste $k \in \mathbb{N}$ mit $P^{(k)}(z_0) \neq 0$ ist k_0 die *Vielfachheit der Nullstelle* z_0. Begründung:

$$P(z) = (z - z_0)^{k_0} R_{n-k_0}(z) = (z - z_0)^{k_0} \sum_{l=0}^{n-k_0} \frac{P^{(k_0+l)}(z_0)}{(k_0 + l)!}(z - z_0)^l,$$

d.h., die Nullstelle z_0 hat mindestens die Vielfachheit k_0. Das Restpolynom R_{n-k_0} hat an der Stelle z_0 den Wert $P^{(k_0)}(z_0)/k_0! \neq 0$, d.h., die Nullstelle z_0 hat auch keine größere Vielfachheit als k_0.

Nullstellenschranken für Polynome

Große Bedeutung für numerische Verfahren haben Abschätzungen, in welchen Bereichen der komplexen Ebene denn die Nullstellen eines gegebenen Polynoms überhaupt zu suchen sind.

Der Beweis des Hilfssatzes zeigt, dass *alle Nullstellen eines Polynoms* $P(z) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ *vom Grad* $n \geq 1$ *in der offenen Kreisscheibe um Null mit Radius* $r = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$ *liegen.* Analog wie im obigen Hilfssatz kann man schärfer abschätzen: *Alle Nullstellen von* P *liegen in der abgeschlossenen Kreisscheibe um Null mit dem Radius* $R = \max\{1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\}$ (Übungsaufgabe).

Analog kann man auch zeigen, dass *für ein Polynom* $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ *mit* $|a_n| \geq |a_k|$ *für* $k = 0, \ldots n - 1$ *alle Nullstellen in der abgeschlossenen Kreisscheibe um*

Null mit Radius $r = 2$ liegen. (vgl. M. Dehmer [6]; dort findet man auch weitere interessante Abschätzungen)
Man schätzt dazu analog wie in Hilfssatz 1 mit $|z| > 1$ ab

$$\begin{aligned} |P(z)| &\geq |a_n||z|^n \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|a_n||z|^{n-k}}\right) \\ &\geq |a_n||z|^n \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|z|^k}\right) \\ &> |a_n||z|^n \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z|^k}\right) \\ &= |a_n||z|^n \left(2 - \frac{|z|}{|z|-1}\right) = |a_n||z|^n \frac{|z|-2}{|z|-1}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt $|P(z)| > 0$ für $|z| > 2$.

Schließlich seien die Leser an dieser Stelle noch auf den *Satz von Gerschgorin* über die Lage der Nullstellen des charakterischen Polynoms einer quadratischen Matrix, d.h. also über die Lage der Eigenwerte hingewiesen. Man findet den Satz von Gerschgorin etwa in dem Buch von J. Stoer und R. Bulirsch [5], das ich allen Lesern als Lektüre sehr empfehle. Der Satz von Gerschgorin sagt, dass die *Vereinigung aller Kreisscheiben*

$$K_i = \left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ |z - a_{ii}| \leq \sum_{k=1, k\neq i}^{n} |a_{ik}| \right\}$$

alle Eigenwerte einer $(n \times n)$*-Matrix* $A = (a_{ik})$ *enthält.*

Referenzen

[1] K. Königsberger Analysis 1, Springer-Verlag 1990

[2] H. Leinfelder Zum Fundamentalsatz der Algebra, Didaktik der Mathematik 3, 1981, 187-194

[3] H. Leinfelder Eine Ergänzung zu meiner Note „Zum Fundamentalsatz der Algebra“, Didaktik der Mathematik 4, 1983, 329-331

[4] H. Leinfelder Private Mitteilung, 16.11.2008

[5] J. Stoer, R. Bulirsch Einführung in die numerische Mathematik II, Springer-Verlag 1973

[6] M. Dehmer On the location of zeros of complex polynomials, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics Vol. 7, Issue 1, Article 26, 2006

[7] R. Brigola Fourier-Analysis und Distributionen, edition swk, 2012