**Vorlesungsergänzung zur Ingenieurmathematik**
**R.Brigola**

# Ein kleines Einmaleins über Mittelwertbildungen

Eine fundamentale Idee in der Mathematik beim Umgang mit Zahlen ist die Mittelwertbildung. Es gibt viele verschiedene Möglichkeiten „Mittelwerte" zu definieren. Einige grundlegende Mittelwertbegriffe, die schon vor 4000 Jahren von den Babyloniern und in der Folge von den Griechen verwendet wurden, wollen wir im Folgenden etwas beleuchten. Bereits Babylonier und Griechen kannten durchaus auch die Beziehungen dieser Mittelwertbildungen zueinander. Die Quellen der folgenden Seiten sind bei den Referenzen am Ende angegeben. Ich empfehle sie zur ausführlicheren Lektüre.

## Arithmetische Mittel

Gegeben sei eine Folge reeller Zahlen $x_k, k \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}$ heißt dann die Zahl

$$AM(n,x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

das *arithmetische Mittel von* $x_1, \ldots, x_n$.

**Beispiel.** Sie kaufen $n$ Güter zu den jeweiligen Preisen $p_1, \ldots, p_n$. Der mittlere Preis/Durchschnittspreis pro Gut ist dann $AM(n,p)$.

**Frage:** Wenn für eine Folge von Zahlen $x_k$ gilt, dass $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ ist, konvergieren dann auch die arithmetischen Mittel und wenn ja, dann wohin?

**Satz.** *Wenn $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ ist, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} AM(n,x) = a$; die arithmetischen Mittel der Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergieren also für $n \to \infty$ ebenfalls gegen $a$.*

**Beweis.** Wenn $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ ist, dann gibt es zu beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|x_k - a| < \varepsilon$ für alle $k \geq N$ ist (Grenzwert-Definition). Dann gilt auch (Dreiecksungleichung)

$$|AM(n,x) - a| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - a)\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1}|x_k - a| + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}|x_k - a|.$$

Der erste Term der rechten Seite ist kleiner als $K/n$ für $K = \sum\limits_{k=1}^{N-1}|x_k - a| + 1$.

Der zweite Term ist kleiner als $(n - N + 1)\varepsilon/n < \varepsilon$. Für $n \geq \max\{N, K/\varepsilon\}$ ist also die rechte Seite kleiner als $2\varepsilon$, und folglich $|AM(n,x) - a| < 2\varepsilon$. Das heißt, die arithmetischen Mittel konvergieren für $n \to \infty$ ebenfalls gegen $a$.

**Anmerkungen.** 1) Die Umkehrung des Satzes ist falsch: Die Zahlenfolge $(-1)^k$, $k \in \mathbb{N}$, hat keinen Grenzwert, ihre arithmetischen Mittel konvergieren dagegen gegen Null.
2) Man erkennt am Beweis, dass der Satz ebenso für komplexe Zahlenfolgen und ihre arithmetischen Mittel richtig ist.

**Geometrische Mittel**

Gegeben sei eine Folge *nichtnegativer* reeller Zahlen $x_k$, $k \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}$ heißt dann die Zahl

$$GM(n, x) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$$

das *geometrische Mittel von* $x_1, \ldots, x_n$.

**Beispiel.** Der Preis $P$ einer Ware steige in $n$ Jahren um $p_1\%$ im ersten Jahr, $p_2\%$ im zweiten $\ldots$ $p_n\%$ im $n-$ten Jahr. Nach $n$ Jahren ist der Preis also $P \cdot \Pi_{k=1}^{n}(1+p_k/100)$. Die jährlichen Preissteigerungsfaktoren $q_k = 1+p_k/100$ ergeben den *mittleren Preissteigerungsfaktor* $Q = GM(n, q) = \sqrt[n]{q_1 \cdot q_2 \cdots q_n}$. Nach $n$ Jahren mit einem jährlichen Preissteigerungsfaktor $Q$ ergäbe sich der gleiche Preis wie bei den unterschiedlichen Preissteigerungsfaktoren $q_1, ..., q_n$. Analog erhält man z.B. auch den Durchschnittszins aus variablen Zinsfaktoren in unterschiedlichen Jahren.

In den Übungsaufgaben hatten wir schon gesehen, dass stets $\sqrt{ab} \leq (a+b)/2$ für $a, b \geq 0$ gilt. Eine Erweiterung dieser Ungleichung wollen wir nun für mehr als zwei Faktoren bzw. Summanden erarbeiten. Diese Erweiterung wird *AGM-Ungleichung* genannt und sie sagt, dass immer

$$GM(n, x) \leq AM(n, x).$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn alle $x_k$ gleich sind.

*Die AGM-Ungleichung*

Der Beweis erfordert etwas Arbeit. Als Vorbereitung zeigen wir zunächst eine allgemeinere Ungleichung, aus der dann leicht die AGM-Ungleichung folgt.

**Satz.** *Sind $x_1, \ldots, x_n$ positive reelle Zahlen, deren Produkt gleich $1$ ist, dann gilt für ihre Summe*

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + \ldots + x_n \geq n.$$

*Gleichheit gilt genau dann, wenn $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ ist.*

Aus dem Satz folgt zum Beispiel, dass für beliebige $a, b, c > 0$ immer gilt

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3.$$

Sie können selbst ein paar weitere Beispiele überlegen. Nun zum Beweis des Satzes.

**Beweis.** Der Beweis verwendet vollständige Induktion. Für $n = 2$ und positive $x_1, x_2$ mit $x_1 \cdot x_2 = 1$ folgt die Ungleichung sofort aus der Tatsache, dass $x_1 = 1/x_2$ und $x_1 + x_2 = (1 + x_2^2)/x_2 \geq 2$ ist, da $(x_2 - 1)^2 \geq 0$ gilt. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn beide Zahlen gleich 1 sind.
Nun sei angenommen, dass die Ungleichung für beliebige positive $x_1, \ldots x_n$ gilt, deren Produkt 1 ergibt. Wir rechnen nun nach, dass dann mit $x_{n+1} > 0$ auch die Ungleichung $x_1 + \ldots + x_{n+1} \geq n + 1$ richtig ist, wenn das Produkt $x_1 \cdot x_2 \cdots x_{n+1} = 1$ ist.

Wir können zunächst einmal voraussetzen, dass $x_1, \dots x_{n+1}$ der Größe nach aufsteigend geordnet sind. Gegebenenfalls erreicht man das durch Umnummerierung dieser Zahlen. Dann definieren wir $y_1 = x_1 \cdot x_{n+1}$. Dann gilt, dass das Produkt der $n$ Zahlen $y_1, x_2, \dots x_n$ gleich 1 ist und nach Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} n &\leq y_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \\ &= x_1 x_{n+1} + x_2 + \dots + x_n \\ &= x_1 + \dots x_n + x_{n+1} + x_1 x_{n+1} - x_1 - x_{n+1}. \end{aligned}$$

Addiert man auf beiden Seiten der Ungleichung noch 1 und fasst dann auf der rechten Seite zusammen:

$$x_1 x_{n+1} - x_1 - x_{n+1} + 1 = (x_1 - 1)(x_{n+1} - 1),$$

dann hat man

$$n + 1 \leq x_1 + \dots + x_{n+1} + (x_1 - 1)(x_{n+1} - 1).$$

Da nun nach unserer Anordnung $x_1$ ein Minimum und $x_{n+1}$ ein Maximum der $n+1$ Zahlen ist, deren Produkt aber gleich 1 ist, muss gelten $x_1 \leq 1 \leq x_{n+1}$ ! (Es können nicht alle $x_k < 1$ oder alle $x_k > 1$ sein, wenn ihr Produkt gleich 1 ist.) Das heißt aber, dass $(x_1 - 1)(x_{n+1} - 1) \leq 0$ ist, und daher folgt erst recht die Ungleichung

$$n + 1 \leq x_1 + \dots + x_{n+1}.$$

Gleichheit ergibt sich höchstens, wenn $(x_1 - 1)(x_{n+1} - 1) = 0$, also $x_1 = 1$ oder $x_{n+1} = 1$ ist. Dann ergibt aber das Produkt der restlichen $n$ Zahlen bereits 1 und der zweite Teil der Behauptung folgt dann wieder aus der Induktionsvoraussetzung.

**Beispiel.** Für beliebige $a, b, c > 0$ folgt etwa $\log_a(b) + \log_b(c) + \log_c(a) \geq 3$.

Nun können wir die AGM-Ungleichung sehr leicht erhalten:

**Satz.** *Für alle nichtnegativen reellen Zahlen $x_1, \dots, x_n$ ist das geometrische Mittel nie größer als ihr arithmetisches Mittel:*

$$GM(n, x) \leq AM(n, x).$$

*Gleichheit gilt genau dann, wenn alle Zahlen gleich sind.*

**Beweis.** Ist eine der Zahlen Null, dann gilt die Ungleichung trivialerweise. Seien daher nun alle Zahlen positiv. Man betrachte dann die $n$ Zahlen $x_1/GM(n, x), \dots, x_n/GM(n, x)$. Ihr Produkt ist 1. Die AGM-Ungleichung folgt nun durch einfaches Umstellen der Ungleichung des vorangehenden Satzes

$$\frac{x_1}{GM(n, x)} + \dots + \frac{x_n}{GM(n, x)} \geq n.$$

**Beispiele.** 1) Für $n = 2$ war die AGM-Ungleichung in ihrer geometrischen Interpretation schon in den ältesten Kulturen der Menschheit, d.h. seit etwa 4000 Jahren, bekannt: Der Flächeninhalt eines Rechtecks von gegebenem Umfang wird für das Quadrat am größten.

2) Mit der AGM-Ungleichung erkennt man leicht, dass unter allen Quadern mit gleicher Summe der Kantenlängen der Würfel das größte Volumen hat.

3) Bereits in einer vorhergehenden Vorlesungsergänzung hatten wir gesehen, dass die Fakultäten $n!$, $n \in \mathbb{N}$, schneller wachsen als $3(n/3)^n$:

$$3\left(\frac{n}{3}\right)^n \leq n!$$

Aus der AGM-Ungleichung folgt sofort eine Abschätzung nach oben:

$$n! \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\right)^n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

4) Wir betrachten die Folge $\sqrt[n]{n}$. Die $n$ wachsen, während andererseits die $n$-ten Wurzeln wiederum verkleinern. Was ist für $n \to \infty$ das Ergebnis dieser „gegenläufigen Prozesse“? Bei der Antwort hilft die AGM-Ungleichung:
Man schreibt die Zahl $n$ als Produkt von $\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1 \cdots 1$ mit $n-2$ Einsen und erhält

$$\sqrt[n]{n} = (\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1 \cdots 1)^{1/n} < \frac{2\sqrt{n}+n-2}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Also $0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \dfrac{2}{\sqrt{n}}$ für $n > 1$ , da dann stets $\sqrt[n]{n} > 1$ ist. Da die rechte Seite für $n \to \infty$ gegen Null konvergiert, folgt mit dem Sandwich-Theorem, dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

5) *Wurzelabschätzung*: Für positives $a \neq 1$, $n \geq 2$ und $1 \leq p < n$ ist

$$\sqrt[n]{a^p} < 1 + \frac{p}{n}(a-1), \text{ insbesondere } \sqrt[n]{a} < 1 + \frac{a-1}{n}.$$

Zum Nachweis ergänzt man $a^p$ durch $n-p$ Einsen zu einem Produkt mit $n$ Faktoren und erhält

$$\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{a^p \cdot 1 \cdots 1} < \frac{pa+n-p}{n} = 1 + \frac{p}{n}(a-1).$$

**Satz.** *Wenn $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ ist und alle $x_k > 0$ sind, dann konvergieren auch die geometrischen Mittel der Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ gegen den Grenzwert $a$: $\lim\limits_{n\to\infty} GM(n,x) = a$*

**Beweis.** 1) Sei $a > 0$. Wir verwenden die *Stetigkeit* der Exponential- und der Logarithmusfunktion und die Definition der $Wurzelfunktionen$ mittels Exponentialfunktion. Diese Fakten werden im Vorlesungsteil über Reihen und die damit begründeten Elementarfunktionen erarbeitet. Da $x_n \to a$ für $n \to \infty$ folgt mit der Stetigkeit der Logarithmusfunktion $\ln(x_n) \to \ln(a)$ und damit $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(x_k) \to \ln(a)$ wegen der Konvergenz der arithmetischen Mittel für $n \to \infty$. Dann gilt aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion auch

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(x_k)} \to \mathrm{e}^{\ln(a)} = a \text{ für } n \to \infty.$$

2) Für $a = 0$ kann man nicht wie oben argumentieren. In diesem Fall gilt aber

$$0 \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Dann konvergieren also die geometrischen Mittel ebenso wie die arithmetischen gegen Null („Sandwich-Theorem“, Vorlesungsteil über Grenzwertregeln, Nr. 3) auf S. 11 des Skriptums).

Die Umkehrung des Satzes ist falsch: Betrachten Sie dazu als Beispiel die divergente Folge $a_1 = \frac{1}{4}, a_2 = \frac{1}{5}, a_{n+2} = a_n$ für $n+2 \geq 3$. Ihre geometrischen Mittel konvergieren gegen $1/\sqrt{20}$.

**Harmonische Mittel**

Gegeben sei eine Folge *positiver* Zahlen $x_k$, $k \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}$ heißt dann die Zahl

$$HM(n,x) = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}}$$

das *harmonische Mittel von* $x_1, \ldots, x_n$.

**Beispiel.** An $n$ verschiedenen Stellen koste eine Ware pro Mengeneinheit jeweils $p_1, \ldots, p_n$ Euro. Wenn man an jeder Stelle für den gleichen Betrag $B$ einkauft (etwa Benzin zu verschiedenen Preisen pro Liter), dann ist der Durchschnittspreis pro Mengeneinheit $nB/(B/p_1 + B/p_2 + \ldots + B/p_n)$, also das harmonische Mittel $HM(n,p)$ der Einzelpreise. Analog dazu ist etwa die Durchschnittsgeschwindigkeit, wenn Sie $n$-mal immer die gleiche Strecke mit unterschiedlichen konstanten Geschwindigkeiten $v_1, \ldots, v_n$ fahren, das harmonische Mittel $HM(n,v)$ dieser Geschwindigkeiten. Man rechnet so schnell aus, dass Raserei beim Fahren kaum hohe Durchschnittsgeschwindigkeiten ergibt, wenn man auch immer wieder mal langsamer fahren muss!

Die harmonischen Mittel wurden schon von den alten Griechen zur Entwicklung der Musiktheorie verwendet. Lesenswert dazu ist die Arbeit von H. Hischer [3]. Wieder ist die Frage nach der Größe im Vergleich zu den bisher besprochenen Mittelwerten interessant.

**Satz.** *Für positive reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ gilt stets $HM(n,x) \leq GM(n,x)$ gilt, und Gleichheit gilt genau dann, wenn alle $x_k$ gleich sind.*

**Beweis.** Die Aussage folgt sofort aus der AGM-Ungleichung durch Umstellen der Ungleichung

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}.$$

Für konvergente Folgen positiver Zahlen haben wir die folgende Grenzwertaussage:

**Satz.** *Wenn $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ ist und alle $x_k > 0$ sind, dann konvergieren auch die harmonischen Mittel der Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ gegen den Grenzwert $a$:* $\lim\limits_{n\to\infty} HM(n,x) = a$.

**Beweis.** $a > 0$: $x_n \to a \implies 1/x_n \to 1/a \implies \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \to \frac{1}{a} \implies$ $\frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}} \to a$ für $n \to \infty$.

$a = 0$: Der Grenzwert folgt wieder aus dem „Sandwich-Theorem“, da alle $HM(n, x) \geq 0$ sind.

Auch hier ist die Umkehrung des Satzes falsch: Betrachten Sie dazu zum Beispiel die divergente Folge $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{3}, x_{n+2} = x_n$ für $n + 2 \geq 3$ mit $HM(n, x) \to 2/5$.

*Babylonier, Griechen und der Blues*

Bezeichnen nun für $x, y > 0$ die Zahlen $A(x, y), G(x, y), H(x, y)$ ihr arithmetisches, geometrisches bzw. harmonisches Mittel, so haben wir

$$A(x, y) \cdot H(x, y) = x \cdot y = G(x, y)^2.$$

Umgeformt ergibt sich die von den alten Griechen als *musikalische Proportion* oder auch als *vollkommene* oder *goldene Proportion* bezeichnete Gleichung (vgl. [3])

$$\frac{x}{A(x, y)} = \frac{H(x, y)}{y}.$$

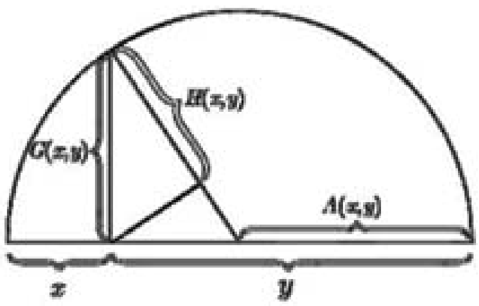
Bereits die Babylonier hatten dieses Wissen, bevor Pythagoras auf seinen Reisen nach Mesopotamien davon Kenntnis erlangt hat. Man kann diese musikalische Proportion mit Saiteninstrumenten physikalisch realisieren: Bezeichnet $l = x_1$ eine Saitenlänge, $x_4 = l/2$, $x_2 = A(x_4, l) = \frac{3}{4}l$, $x_3 = H(x_4, l) = \frac{2}{3}l$, und greift man etwa auf einer Gitarrensaite der Länge $l$ (etwa mit dem Ton E) nacheinander so, dass die schwingende Saite die Längen $x_1$, dann $x_2$, dann $x_3$, dann $x_4$ hat, dann erklingt mit wachsenden Tonhöhen als Arpeggio die Kadenz mit Tonika, Subdominante, Dominante, Tonika oktaviert (etwa E, A, H, E). Die Proportionen

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{A(l/2, l)}{l} = \frac{3}{4} \text{ und } \frac{x_4}{x_3} = \frac{l/2}{H(l/2, l)} = \frac{3}{4}$$

sind gleich und die Tonhöhen mit Saitenlängen des jeweiligen Zählers und Nenners ergeben in beiden Fällen einen Quartabstand. Entsprechend ergeben die Proportionen $x_3/x_1$ und $x_2/x_4$ Quintabstände.

Die Akkorde über den Tönen bilden die klassische Dur-Akkord-Kadenz und ergeben die wohl meistgebrauchte Akkordfolge in der westlichen Volksmusik, beim Blues oder in der Rockmusik.

Man kann die verwendeten Mittel durch Strecken in einem Kreis geometrisch veranschaulichen (Prüfen Sie das mit dem Höhen- und dem Kathedensatz aus der Euklidischen Geometrie). Die Graphik ist der zitierten Arbeit [3] entnommen. Sie geht bereits auf den griechischen Mathematiker Pappus von Alexandria (3. Jh. n. Chr.) zurück:



*Babylonisches Wurzelziehen*

Den babylonischen Algorithmus zur Wurzelapproximation kann man folgendermaßen verstehen:
Gesucht werde die Wurzel einer positiven Zahl $a$. Dazu betrachte man eine multiplikative Zerlegung von $a$ der Form $a = x_0 y_0$ mit $0 < x_0 < \sqrt{a} < y_0$. Dann ist die gesuchte $\sqrt{a}$ das geometrische Mittel der Zahlen $x_0$ und $y_0$: $\sqrt{a} = G(x_0, y_0)$. Eine solche Zerlegung lässt sich immer finden: Ist $a > 1$ wähle man etwa $x_0 = 1$, $y_0 = a$, ist $a < 1$ wähle man etwa $x_0 = a$ und $y_0 = 1$.
Nun definiert man für $n+1 \geq 1$ mit dem harmonischen Mittel $H(x_n, y_n)$ und dem arithmetischen Mittel $A(x_n, y_n)$ die Folgenglieder

$$x_{n+1} = H(x_n, y_n) \text{ und } y_{n+1} = A(x_n, y_n).$$

Es gelten die Ungleichungen

$$0 < A(x_n, y_n) - H(x_n, y_n) < A(x_n, y_n) - x_n = \frac{1}{2}(y_n - x_n)$$

und für alle $n \in \mathbb{N}$ wieder $G(x_n, y_n) = \sqrt{a}$. (Nach wie vor kann $G(x_n, y_n)$ nicht einfach ausgerechnet werden, sondern soll ja erst angenähert werden.)
Wegen $y_{n+1} - x_{n+1} = (y_n - x_n)^2/(2(y_n + x_n)) < (y_n - x_n)/2$ und damit

$$y_n - x_n < \frac{y_0 - x_0}{2^n}$$

konvergieren also sowohl die $x_n$ als auch die $y_n$ gegen die gesuchte $\sqrt{a}$ (wieder nach dem Sandwich-Theorem). Aus $\sqrt{x_n y_n} = \sqrt{a}$, also $x_n = a/y_n$ erhält man dann auch die bekannte Rekursion für die Wurzelapproximation

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}\left(y_n + \frac{a}{y_n}\right).$$

Diese Form des „entschachtelten babylonischen Algorithmus“ wird Heron von Alexandria (1. Jh. n. Chr.) zugeschrieben (vgl. [3]).

## Quadratische Mittel

Gegeben sei eine Folge reeller Zahlen $x_k$, $k \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}$ heißt dann die Zahl

$$QM(n, x) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

das *quadratische Mittel von* $x_1, \ldots, x_n$.

Die Lage des quadratischen Mittels im Vergleich zu den bisher behandelten anderen Mitteln zeigt
**Satz.** *Für beliebige reelle Zahlen* $x_1, \ldots, x_n$ *gilt stets*

$$QM(n, x) \geq AM(n, x).$$

**Beweis.** Mit vollständiger Induktion: $x_1 \leq (x_1^2)^{1/2} = |x_1|$. Die Ungleichung sei nun richtig für $x_1, \ldots, x_n$. Ist das arithmetische Mittel $AM(n, x) < 0$ ist die Ungleichung richtig. Daher sei nun angenommen, dass $AM(n, x) \geq 0$ ist.

Dann gilt nach Induktionsvoraussetzung die entsprechende Ungleichung auch für die Quadrate der vorkommenden Mittelwerte und wir haben:

$$n\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \geq 0.$$

Nun folgen die Ungleichungen

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{n+1})^2 \\
0 &\leq \sum_{k=1}^{n}(x_k^2 - 2x_k x_{n+1} + x_{n+1}^2) \\
0 &\leq \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2x_{n+1}\sum_{k=1}^{n} x_k + n x_{n+1}^2 + \left[n\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2\right] + x_{n+1}^2 - x_{n+1}^2
\end{aligned}$$

Auf der rechten Seite haben wir die Voraussetzung verwendet, dass der Ausdruck in der eckigen Klammer $\geq 0$ ist (siehe weiter oben). Die rechte Seite ist also durch unsere hinzugefügten Summmanden höchstens größer geworden. Durch Zusammenfassen ergibt sich nun:

$$0 \leq (n+1)\sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1}\right)^2.$$

Da das Quadrat der letzten Klammer auf der rechten Seite $\geq 0$ ist, folgt (durch weitere Addition dieses Terms zur rechten Seite) erst recht

$$0 \leq (n+1)\sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right)^2.$$

Umstellen und Anwenden der (monoton wachsenden) Wurzelfunktion ergibt die behauptete Relation zwischen quadratischen und arithmetischen Mitteln: $AM(n,x) \leq QM(n,x)$.

Bei konvergenten Folgen ergibt sich auch die Konvergenz der quadratischen Mittel:

**Satz.** *Wenn* $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ *ist, dann konvergieren die quadratischen Mittel der Folge* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *für* $n \to \infty$ *gegen den Grenzwert* $|a|$*:* $\lim\limits_{n\to\infty} QM(n,x) = |a|$.

Der einfache Beweis sei Ihnen als kleine Übung diesmal selbst überlassen. Auch hier ist die Umkehrung des Satzes falsch: Betrachten Sie $x_k = (-1)^k$ für $k \in \mathbb{N}$. Wie bei allen anderen besprochenen Mittelbildungen kann man also „Konvergenz im Mittel“ selbst für divergente Folgen oft noch erreichen. Diese Beobachtungen sind Ausgangspunkt für eine ganze *Limitierungstheorie* für Folgen als mathematisches Teilgebiet.

Es gibt vielfältige Anwendungen quadratischer Mittel (English: Root mean square) in Wissenschaft, Technik und Wirtschaft. Eine der bekanntesten Anwendungen ist zunächst der Begriff des mittleren Fehlers in der Statistik oder in der Messtechnik:

Hat man (z.B. aus Messungen einer physikalischen oder statistischen Größe) n reellwertige Messwerte/Stichproben $x_1, \ldots, x_n$, dann bezeichnet man $\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2}$ als „mittleren (quadratischen) Fehler“, wobei $\overline{x}$ für das arithmetische Mittel der $x_k$ steht und oft aufgrund der Stichprobe als Schätzwert für die untersuchte Größe dient. Dieser mittlere Fehler ist also das quadratische Mittel der Abweichungen $(x_k - \overline{x})$ vom Schätzwert. Auch die sogenannte „Standardabweichung“ $\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2}$ ist ein beim Vorfaktor leicht modifiziertes quadratisches Mittel. Beide Mittelwertbildungen werden als *Fehlermaß* für die Schätzung $\overline{x}$ vielfach verwendet (Stichworte: Maximum-Likelihood-Schätzung und erwartungstreue Schätzung).

Es gibt zahlreiche andere Möglichkeiten, Mittelwerte einzuführen, zum Beispiel *gewichtete Mittel* der Form

$$AM_g(n,x) = (g_1x_1 + g_2x_2 + \ldots + g_nx_n)/(g_1 + g_2 + \ldots + g_n)$$

oder

$$M_g(n,x) = (x_1^{g_1} \cdot x_2^{g_2} \cdots x_n^{g_n})^{1/(g_1+\ldots+g_n)}.$$

Auch hier kann man für positive $x_k$ und $g_k$ zeigen, dass analog zur AGM-Ungleichung allgemeiner gilt (ausgeführt etwa bei F. Erwe [1]):

$$M_g(n,x) \leq AM_g(n,x).$$

Sie werden mehr dazu lernen können, wenn Sie einmal eine Statistik- oder Mathematik-Vorlesung in einem höheren Semester besuchen.
Analoge Begriffsbildungen für *Mittelwerte von Funktionen* an Stelle von Zahlenfolgen sind ebenso von ganz grundsätzlicher Bedeutung in Wissenschaft und Technik.

Für eine reellwertige, integrierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bezeichnet man analog zum arithmetischen Mittel die Größe $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ als *Mittelwert von $f$ auf dem Intervall* $[a,b]$ ( Beispiel: Gleichspannungsanteil eines $(b-a)$-periodischen Spannungsverlaufs $f(t)$). Entsprechend ist

$$\sqrt{\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t}$$

das *quadratische Mittel von $f$ auf* $[a,b]$. Der letzte Begriff kann auch für komplexwertige Funktionen verwendet werden (deshalb sind die Betragstriche beim Integranden gesetzt). Mit dem quadratischen Mittel lassen sich Begriffe wie „Leistung“ oder „Effektivwert“ zeitbegrenzter oder periodischer Signale (z.B. Spannungsverläufe) einführen und vieles mehr. Im zweiten Semester wird gezeigt, wie grundlegend diese und andere ähnliche Mittelbildungen für die Entwicklung derjenigen Mathematikteilgebiete sind, ohne die ein Gebiet wie die Elektrotechnik oder andere Ingenieurdisziplinen garnicht hätten entstehen können.

**Das arithmetisch-geometrische Mittel**

Das arithmetisch-geometrische Mittel (kurz AGM) wird folgendermaßen definiert:
Gegeben seien $0 < a < b$. Man bildet zwei Folgen, die man rekursiv definiert:

$$a_0 = a, \;\; b_0 = b, \;\; a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \;\; b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Es gilt

$$0 < a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq \ldots \leq b_1 \leq b_0.$$

Der Beweis war Übungsaufgabe. Die Folge der $a_n$ entsteht aus geometrischen Mitteln, die der $b_n$ aus arithmetischen Mitteln.
Da also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst und nach oben (etwa durch $b_0$) beschränkt ist, gibt es einen Grenzwert $A$ dieser Folge. Analog gibt es einen Grenzwert $B$ der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Aus den Grenzwertregeln folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = A = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n b_n} = \sqrt{AB}.$$

Hieraus folgt $A = B$. Beide Folgen haben denselben Grenzwert.

**Definition.** *Der wie oben definierte Grenzwert $A$ heißt das arithmetisch-geometrische Mittel von $a$ und $b$, notiert durch $AGM(a, b)$.*

Es gelten

$$\sqrt{ab} \leq AGM(a, b) \leq \frac{a + b}{2}$$

und $AGM(\alpha a, \alpha b) = \alpha AGM(a, b)$ für $\alpha, a, b > 0, a < b$. (Beweis als Übung!)

Es gibt wichtige Anwendungen des AGM. Es wurde von C.F. Gauß (1777-1855) bereits im Alter von 23 Jahren verwendet, um sogenannte elliptische Integrale zu berechnen, die bei der Berechnung von Bogenlängen von *Lemniskaten* oder bei Fragen von Gravitationskräften elliptisch verteilter Massen eine Rolle spielen. Diese Fragestellungen führen aber weit über das hier gesteckte Ziel eines *kleinen Einmaleins zu Mittelwerten* hinaus, das wir daher hier beenden.

Bei Interesse an Vertiefungen und detaillierteren Ausführungen empfehle ich zur weiteren Lektüre die folgenden Quellen, die ich verwendet habe.

**Referenzen.**


| | | |
|---|---|---|
| [1] | F. Erwe | Differential- und Integralrechnung I, Bibliographisches Institut, Mannheim 1969 |
| [2] | H.-G. Gräbe | Einige wichtige Ungleichungen, 1997, Download von http://lsgm.uni-leipzig.de/KoSemNet/pdf/graebe-97-1.pdf |
| [3] | H. Hischer | 4000 Jahre Mittelwertbildung, math. did. 25 (2002) Band 2 |
| [4] | P. Korovkin | Ungleichungen, Dt. Verlag der Wissenschaften, Berlin 1970, Schülerbücherei, Band 9 |
| [5] | W. Walter | Analysis 1, Springer Verlag, 6. Auflage, Berlin 2001 |