Vorlesungsergänzung Nr. 1 zur Ingenieurmathematik
R. Brigola

1 Die Leibniz-Formel in der Differentialrechnung

Die bekannte Produktregel $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ für die Ableitung des Produkts zweier differenzierbarer Funktionen f und g lässt sich zur *Leibniz-Formel* für die n-te Ableitung des Produkts hinreichend oft differenzierbarer Funktionen verallgemeinern (G.W.Leibniz 1646-1716). Zur geschichtlichen Orientierung: Einerseits in Europa zu dieser Zeit noch finsterster Aberglaube, Folter und Hexenverbrennungen, andererseits die Anfänge von Differential- und Integralrechnung und Studium erster unendlicher Reihen und der dargestellten elementaren Funktionen wie Exponential- und Logarithmus-Funktionen, trigonometrische Funktionen usw., wie auch die Anfänge der Physik und ihren Anwendungen.

Satz (Leibniz-Formel): *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle n-mal differenzierbaren Funktionen f und g gilt:*

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Dabei bedeuten $f^{(0)} = f, f^{(1)} = f'$ die erste Ableitung, $f^{(k)}$ die k-te Ableitung einer entsprechend oft differenzierbaren Funktion f.

Beweis: Zum Beweis dieser Aussage - eine All-Aussage über alle natürlichen Zahlen - verwenden wir *vollständige Induktion*:

1. Die Aussage ist richtig für m=1, da gilt:

$$\binom{1}{0} f^{(0)} g^{(1-0)} + \binom{1}{1} f^{(1)} g^{(1-1)} = fg' + f'g.$$

2. Die Aussage gelte nun für $m \in \mathbb{N}$ (Induktionsvoraussetzung). Unter dieser Voraussetzung ist zu zeigen:

$$(f \cdot g)^{(m+1)} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} f^{(k)} g^{(m+1-k)}.$$

Wir rechnen nun ganz analog wie beim Beweis des Binomialsatzes wie folgt:

3. Nach Induktionsvoraussetzung und der Produktregel für die erste Ableitung gilt

$$\begin{aligned}
(f\cdot g)^{(m+1)} &= \left((f\cdot g)^{(m)}\right)' \\
&= \left(\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}f^{(k)}g^{(m-k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}f^{(k+1)}g^{(m-k)} + \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}f^{(k)}g^{(m+1-k)} \\
&= gf^{(m+1)} + \sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}f^{(k+1)}g^{(m-k)} + \sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}f^{(k)}g^{(m+1-k)} + fg^{(m+1)} \\
&= gf^{(m+1)} + \sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k-1}f^{(k)}g^{(m+1-k)} + \sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}f^{(k)}g^{(m+1-k)} + fg^{(m+1)} \\
&= gf^{(m+1)} + \sum_{k=1}^{m}\left[\binom{m}{k-1}+\binom{m}{k}\right]f^{(k)}g^{(m+1-k)} + fg^{(m+1)} \\
&= gf^{(m+1)} + \sum_{k=1}^{m}\binom{m+1}{k}f^{(k)}g^{(m+1-k)} + fg^{(m+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}f^{(k)}g^{(m+1-k)}.
\end{aligned}$$

Wie Sie sehen, ist damit alles geleistet.

2 Warum ist der Binomialsatz so wichtig?

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass aus dem Binomialsatz die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion folgt:

$$\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^y=\mathrm{e}^{x+y}\quad(\text{für alle x, y}\in\mathbb{R}).$$

Da in der Definition der Exponentialfunktion

$$x\longrightarrow \mathrm{e}^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

und allgemein von Potenzen

$$a^x=\mathrm{e}^{x\ln(a)}\quad(\text{für } a>0 \text{ und alle } x\in\mathbb{R}),$$

nur ganzzahlige Exponenten auftreten, ist damit das Rechnen mit allgemeinen Potenzen auf das Rechnen mit „unendlichen Summen“zurückgeführt. D.h., man rechnet mit Grenzwerten $\lim_{n\to\infty}s_n$ von Folgen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deren Folgenglieder endliche Summen etwa der Form

$$s_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

wie bei der e-Funktion sind. Dabei treten *nur Zahlen mit ganzzahligen Exponenten* auf. Somit ist also eine „komplizierte abstrakte Zahl“ wie e^x dadurch erklärt, dass man sie näherungsweise durch einfache Addition von Zahlen mit ganzzahligen Exponenten erhält, die jeder leicht ausrechnen kann. Sie sehen hier schon ein allgemeines Prinzip in der Mathematik: Komplizierte Begriffe werden auf bekannte einfachere Begriffe zurückgeführt.

Ganz analog sind Logarithmen, trigonometrische Funktionen und ihre Umkehrfunktionen als Grenzwerte endlicher Summen von Zahlen mit ganzzahligen Exponenten definiert. So sind zum Beispiel

$$\ln(1+x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \ \ (\text{für } -1 < \mathrm{x} \leq 1),$$

$$\cos(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \ \ (\text{für alle } \mathrm{x} \in \mathbb{R}),$$

$$\sin(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \ \ (\text{für alle } \mathrm{x} \in \mathbb{R}).$$

Die Rechengesetze dieser Funktionen sind allesamt begründet durch das Rechnen mit der Exponentialfunktion (Die *Euler-Gleichung* $\mathrm{e}^{jx} = \cos x + j\sin(x)$ verbindet ja die trigonometrischen Funktionen mit der Exponentialfunktion (L.Euler 1707-1783)). Genaueres hierzu erfahren Sie in dem spannenden, grundlegenden *Abschnitt über unendliche Reihen*.

Probieren Sie einfach mal selbst gleich mit dem Taschenrechner aus

$$r_1 = \sum_{k=0}^{7} \frac{0.2^k}{k!} \text{ und } r_2 = \sum_{k=0}^{3} (-1)^k \frac{0.2^{2k}}{(2k)!}$$

zu berechnen und vergleichen Sie die erhaltenen Werte r_1 mit der Anzeige Ihres Rechners für $\mathrm{e}^{0.2}$, r_2 mit der Anzeige von $\cos(0.2)$. Dann haben Sie eine Vorstellung, wie die Generationen von Mathematikern, Physikern und Ingenieuren früher überhaupt Näherungswerte von Funktionen wie e^x, $\cos(x)$ oder $\sin(x)$ berechnen konnten (fleißige Rechenarbeit bevor es Taschenrechner und Computer gab!), und wie es heute in etwa per Computerprogramm gemacht werden könnte. *Die exakten Werte bleiben abstrakt (Grenzwerte der obigen Reihen im Beispiel), für alle Zeiten unbekannt, und erhalten dafür Namen wie* $\mathrm{e}^{0.2}$ *oder* $\cos(0.2)$ *im obigen Beispiel.*