Vorlesungsergänzung zur Ingenieur-Mathematik II

Die Matrix-Exponentialfunktion

R. Brigola

Wir führen für quadratische Matrizen A die Matrix-Exponentialfunktionen e^A und e^{At} ($t \in \mathbb{R}$) ein, überlegen einige ihrer Eigenschaften und verwenden sie zur Lösung linearer Differentialgleichungssysteme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Matrizen-Reihen

Definition. *$M_{n,n}(\mathbb{K})$ bezeichne die Menge aller $(n \times n)$-Matrizen mit Koeffizienten aus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Für $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, wird wie folgt eine Norm eingeführt:*

$$||A|| = (\sum_{i,j} |a_{ij}|^2)^{1/2}.$$

Die Abbildung $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$ bildet offenbar mit dieser Norm den Vektorraum $M_{n,n}(\mathbb{K})$ isometrisch auf den Vektorraum $\mathbb{K}^{n \cdot n}$ mit der üblichen euklidischen Norm ab. Außerdem gelten für alle A und B aus $M_{n,n}(\mathbb{K})$ und $x \in \mathbb{K}^n$ die Ungleichungen $||AB|| \leq ||A||\,||B||$ und $||Ax|| \leq ||A||\,||x||$ (Übung).

Definition. *Für eine Folge $A_k = (a_{ij}^{(k)})$ von Matrizen in $M_{n,n}(\mathbb{K})$ heißt die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ konvergent gegen $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(\mathbb{K})$, wenn die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)}$ für jedes Indexpaar (i, j) gegen a_{ij} konvergieren.*

Im Folgenden sei für jedes $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ die Matrix $A^0 = E$ die Einheitsmatrix, und $D(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ bezeichne die Diagonalmatrix

$$D(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Satz 1. a) *Wenn für* $A_k \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ *die Reihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} ||A_k||$ *konvergiert, dann konvergiert auch die Reihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k$.
b) *Die Reihe* $\mathrm{e}^A = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ *konvergiert für alle* $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$.
c) *Die Reihe* $\mathrm{e}^{At} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k$ *konvergiert für alle* $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ *und alle* $t \in \mathbb{R}$. *Sie heißt die Matrix-Exponentialfunktion.*

Beweis. a) Ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} ||A_k|| < \infty$, so hat man eine konvergente Majorante für jede der Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_{ij}^{(k)}|$, da $|a_{ij}^{(k)}| \leq ||A_k||$ für alle k ist. Damit ergibt sich die komponentenweise Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k$.
b) Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{||A||^k}{k!}$ konvergiert gegen $\mathrm{e}^{||A||}$. Weil $||A^k|| \leq ||A||^k$ ist, konvergiert auch die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} ||\frac{1}{k!} A^k||$. Nach a) konvergiert also $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$. Ihren Limes notiert man durch e^A.
c) Völlig analog zu b) erhält man die Konvergenz für $\mathrm{e}^{At} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k$.

Anmerkung. Es gibt keinerlei Anlass zu glauben, dass die Komponenten von e^{At} wieder Exponentialfunktionen wären. Dies ist auch in aller Regel nicht so! Man vergleiche dazu das Beispiel am Ende.

Die explizite Berechnung von e^A bzw. e^{At} ist im Allgemeinen schwierig und mit erheblichem Aufwand verbunden. Hierzu sei prinzipiell auf das sehr empfehlenswerte Buch von H. Niemeyer und E. Wermuth [1] verwiesen und bemerkt, dass Computeralgebra-Systeme wie Maple, Mathematica u.a. gute Unterstützung geben können. Hinsichtlich numerischer Algorithmen zur Berechnung der Matrix-Exponentialfunktion sei auf die später zitierte Arbeit von C. Moler und C. Van Loan hingewiesen (siehe S. 8 unten). In Sonderfällen ist der folgende Satz 2 hilfreich.

Eigenschaften der Matrix-Exponentialfunktion

Lineare Abbildungen A sind wegen $Ax_n - Ax_0 = A(x_n - x_0)$ genau dann stetig, wenn sie stetig im Nullpunkt sind.
Für eine feste Matrix B sind die Abbildungen $X \to BX$ und $X \to XB$ linear und stetig auf $M_{n,n}(\mathbb{K})$.
Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ konvergiert in $M_{n,n}(\mathbb{K})$ genau dann, wenn ihre Partialsummen $S_m = \sum_{k=0}^{m} A_k$ im üblichen Sinn im euklidischen Vektorraum $M_{n,n}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n \cdot n}$ konvergieren (komponentenweise Konvergenz).
Damit folgt: Konvergieren die S_m gegen S, dann konvergieren die BS_m gegen BS und die $S_m B$ gegen SB für $m \to \infty$. Also

$$\sum_{k=0}^{\infty}(BA_k) = B\sum_{k=0}^{\infty} A_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty}(A_k B) = (\sum_{k=0}^{\infty} A_k)B.$$

Satz 2. a) *Ist* $D = D(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *eine Diagonalmatrix, dann ist* $\mathrm{e}^D = D(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n})$.
b) *Ist* A *beliebig und* P *invertierbar, dann gilt*

$$\mathrm{e}^{P^{-1}AP} = P^{-1}\mathrm{e}^A P.$$

Ist also A *diagonalisierbar, dann ist auch* e^A *diagonalisierbar.*

Beweis. a) Mit $D^k = D(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$ folgt die erste Aussage des Satzes

$$\mathrm{e}^D = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k = \sum_{k=0}^{\infty} D(\lambda_1^k/k!, \ldots, \lambda_n^k/k!) = D(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n}).$$

b) Es gilt

$$(P^{-1}AP)^k = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP) = P^{-1}A^k P,$$

und damit die Aussage b) des Satzes:

$$\mathrm{e}^{P^{-1}AP} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(P^{-1}AP)^k = P^{-1}\mathrm{e}^A P.$$

Ist $P^{-1}AP = D(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, dann ist

$$P^{-1}\mathrm{e}^A P = D(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n}),$$

d.h., mit A ist auch e^A diagonalisierbar.

Die Ableitung von $\mathrm{e}^{\mathbf{At}}$ nach t

Wir zeigen, dass die Matrix-wertige Funktion e^{At} von $t \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechnen ihre Ableitung.

Satz 3. *Für $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ ist e^{At} komponentenweise differenzierbar nach t und es gilt*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{At} = A\mathrm{e}^{At} = \mathrm{e}^{At}A.$$

Beweis. Ist $A^k = (a_{ij}^{(k)})$, dann sind die Koeffizienten in e^{At} konvergente Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a_{ij}^{(k)} t^k$ mit Konvergenzradius $R = \infty$. Diese Reihen sind gliedweise differenzierbar und ihre Ableitungen sind

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} a_{ij}^{(k)} t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a_{ij}^{(k+1)} t^k.$$

Sie konvergieren wieder für alle $t \in \mathbb{R}$. Daher ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^{k+1} t^k = A\mathrm{e}^{At}.$$

Nach der Bemerkung vor Satz 2 gilt auch $A\mathrm{e}^{At} = \mathrm{e}^{At}A$.

Die Funktionalgleichung für die Matrix-Exponentialfunktion

Satz 4. a) *Gilt $AB = BA$, dann ist $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A\mathrm{e}^B = \mathrm{e}^B\mathrm{e}^A$.*
b) *Für $s, t \in \mathbb{R}$ und $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ gilt $\mathrm{e}^{A(s+t)} = \mathrm{e}^{As}\mathrm{e}^{At}$.*
c) *Für jedes $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ ist die Matrix e^A invertierbar und es gilt*

$$(\mathrm{e}^A)^{-1} = \mathrm{e}^{-A}.$$

Beweis. a) Gilt $AB = BA$, dann ist nach der Vorbemerkung zu Satz 2 $B\mathrm{e}^{At} = \mathrm{e}^{At}B$. Für $F(t) = \mathrm{e}^{(A+B)t} - \mathrm{e}^{At}\mathrm{e}^{Bt}$ gilt dann mit der Produktregel beim Differenzieren und den Vertauschbarkeitseigenschaften

$$\begin{aligned} F'(t) &= (A+B)\mathrm{e}^{(A+B)t} - A\mathrm{e}^{At}\mathrm{e}^{Bt} - \mathrm{e}^{At}B\mathrm{e}^{Bt} \\ &= (A+B)\left(\mathrm{e}^{(A+B)t} - \mathrm{e}^{At}\mathrm{e}^{Bt}\right) = (A+B)F(t). \end{aligned}$$

Damit ist $F(t)$ die eindeutig bestimmte Lösung des Differentialgleichungssystems $X'(t) = (A+B)X(t)$ mit $F(0) = 0$. Daher muss $F(t) = 0$ sein für alle $t \in \mathbb{R}$, d.h.,

$$\mathrm{e}^{(A+B)t} = \mathrm{e}^{At}\mathrm{e}^{Bt}.$$

Für $t = 1$ ergibt sich die Aussage a) des Satzes.
b) As und At sind vertauschbar, also gilt

$$\mathrm{e}^{A(s+t)} = \mathrm{e}^{As}\mathrm{e}^{At} = \mathrm{e}^{At}\mathrm{e}^{As}.$$

c) Es gilt $\mathrm{e}^A\mathrm{e}^{-A} = \mathrm{e}^0 = E$, also ist e^A invertierbar mit Inverser e^{-A}.

Beispiele

1. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathrm{e}^{At} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}.$$

2. Für den Fall
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
kann man die zugehörigen Exponentialreihen einfach berechnen:
$$\mathrm{e}^{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^2 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^3 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{e}^{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
$$\mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^2 & \mathrm{e}^2 \\ 0 & \mathrm{e}^3 \end{pmatrix} \neq \mathrm{e}^{B}\mathrm{e}^{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^2 & \mathrm{e}^3 \\ 0 & \mathrm{e}^3 \end{pmatrix}.$$
Aus $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & \dfrac{a^n - b^n}{a-b} \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$ für $a \neq b$ folgt
$$\mathrm{e}^{A+B} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^2 & \mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^2 \\ 0 & \mathrm{e}^3 \end{pmatrix}.$$
Also Vorsicht, wenn $AB \neq BA$!

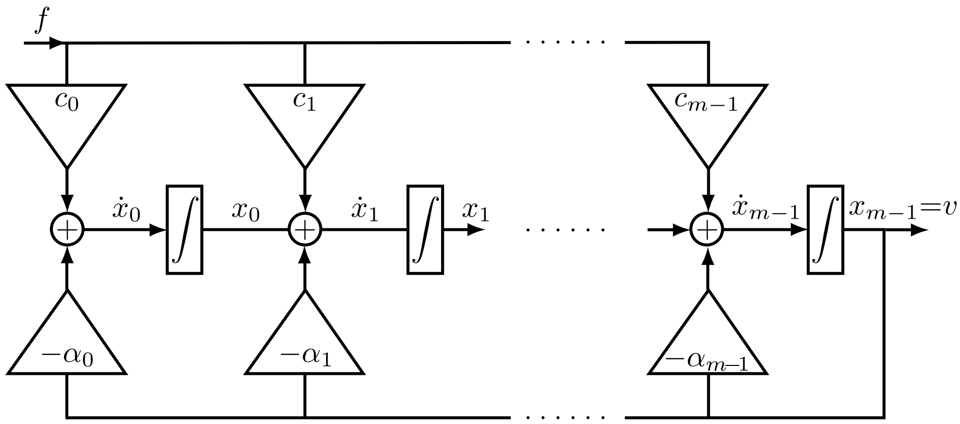
Anwendung bei der Lösung linearer Systeme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Man prüft sofort nach, dass $F(t) = \mathrm{e}^{At}$ für $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ die eindeutig bestimmte Fundamentalmatrix des Systems $x' = Ax$ ist, die $F(0) = E$ erfüllt:
$$F'(t) = AF(t).$$
Die Eindeutigkeit folgt aus dem entsprechenden Eindeutigkeitssatz für Anfangswertprobleme des obigen Typs.
Damit erhält man die Lösung eines Systems erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten der Form
$$x' = Ax + y$$
für $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, Inhomogenität y mit stetigen Komponenten und gegebene Anfangswerte $x(0) = x_0$ durch *Variation der Konstanten* als
$$x(t) = \mathrm{e}^{At}x_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{A(t-s)}y(s)\mathrm{d}s.$$
Zum Beweis: siehe Vorlesungsteil über Gewöhnliche Differentialgleichungen.

Lineare Filter als Anwendungsbeispiel

Im Vorlesungsteil über mathematische Grundlagen der linearen Systemtheorie (vgl. auch [2]) werden wir sehen, dass eine große Klasse linearer Übertragungssysteme in der Elektrotechnik, die einen im Einzelfall spezifizierten Frequenzgang besitzen sollen, auf die im Folgenden dargestellte Weise konstruiert werden kann:

Wir betrachten dazu das skizzierte Blockschaltbid aus Addierern, Integratoren und Proportionalgliedern. Seine Komponenten können durch elektrotechnische Bauelemente (Operationsverstärker, Widerstände, Kapazitäten) nachgebildet werden.



Wir betrachten dieses Netzwerk als kausales Übertragungssystem für Spannungsverläufe, das Eingangsspannungen $f(t)$ in Ausgangsspannungen $v(t)$ transformiert. Als Anfangszeitpunkt für das Aufschalten von f wählen wir $t = 0$ und setzen voraus, dass das Netzwerk zur Zeit $t = 0$ im energielosen Ruhezustand ist, d.h. alle Anfangswerte seien Null.

Die Zustandsbeschreibung dieses Netzwerks durch ein System erster Ordnung bei verschwindenden Anfangswerten lautet:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{c}f(t)$$

mit $\mathbf{x}(t) = (x_0(t), x_1(t), \ldots, x_{m-1}(t))^T$, $\quad \mathbf{c} = (c_0, c_1, \ldots, c_{m-1})^T$ und der Matrix A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & & \cdots & -\alpha_1 \\ & 1 & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & \mathbf{0} & & 1 & 0 & -\alpha_{m-2} \\ & & & & 1 & -\alpha_{m-1} \end{pmatrix}$$

Um konkreter zu rechnen, wählen wir etwa

$$m = 3,\ c_0 = \Omega^3,\ c_1 = c_2 = 0,\ a_0 = \Omega^3,\ a_1 = 2\Omega^2,\ a_2 = 2\Omega.$$

Bemerkung. Mit dieser Wahl beschreibt das Netzwerk ein sogenanntes *Butterworth-Tiefpass-Filter* der Ordnung 3 mit Grenzfrequenz $\Omega/(2\pi)$ (vgl. [2]).

Wir wählen als Eingangssignal eine Spannung $f(t)$ mit Träger $\mathrm{Tr}(f) \subset [0, \infty[$ (d.h., $f(t) = 0$ für $t < 0$) und fragen nach der Ausgangsspannung $x_2(t) = v(t)$ als zugehörige Systemantwort. Die Zustandsbeschreibung lautet dann:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\Omega^3 \\ 1 & 0 & -2\Omega^2 \\ 0 & 1 & -2\Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Omega^3 f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Im vorliegenden Fall ergibt sich für die benötigte Komponente g_{31} von e^{At} :

$$g_{31}(t) = \frac{1}{3\Omega^2} \left(3\mathrm{e}^{-\Omega t} - 3\mathrm{e}^{-\Omega t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}\Omega t}{2} \right) + \sqrt{3}\mathrm{e}^{-\Omega t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\Omega t}{2} \right) \right).$$

Die gesuchte Ausgangsspannung ist die Faltung

$$x_2(t) = \int_0^t \Omega^3 f(s) g_{31}(t-s) \mathrm{d}s.$$

Die Leser mögen als Übung mit den Mitteln der Linearen Algebra und mit Unterstützung durch ein geeignetes Computeralgebra-System die komplette Matrix e^{At} bestimmen.

Bemerkung. Man kann auch andere Matrizen-Funktionen als die hier behandelte Matrix-Exponentialfunktion einführen. Interessierte Leser seien dazu auf das Buch [1] verwiesen.

Die Laplace-Transformation von $\mathbf{e^{At}}$

Wir zeigen im Folgenden, wie man die e^{At} (für kleine Matrizen A) mit Hilfe der Laplace-Transformation berechnen kann. Hierzu zwei Sätze als Vorbereitung:

Satz 5. Die Neumann'sche Reihe. *Für eine quadratische Matrix Q mit $||Q|| < 1$ ist $(E - Q)$ regulär und es gilt die Neumann'sche Reihendarstellung*

$$(E - Q)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k.$$

Beweis: Aus $(E - Q)x = 0$ für $x \neq 0$ folgt $x = Qx$ und damit der Widerspruch $||x|| \leq ||Q|| \, ||x|| < ||x||$. Also ist $(E - Q)$ invertierbar.
Aus $||Q||^n + ||Q||^{n+1} + \ldots + ||Q||^{n+k} \leq ||Q||^n/(1 - ||Q||)$ für $n, k \in \mathbb{N}$ folgt mit Satz 1 die Konvergenz der Neumann'schen Reihe. Außerdem gelten

$$(E - Q)(E + Q + Q^2 + \ldots + Q^n) = E - Q^{n+1},$$

so dass wegen $||Q^{n+1}|| \leq ||Q||^{n+1} \to 0$ für $n \to \infty$

$$(E - Q)(E + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} Q^k) = E - \lim_{n\to\infty} Q^{n+1} = E.$$

Daraus folgt die Darstellung von $(E - Q)^{-1}$ durch die Neumann'sche Reihe.

Satz 6. Resolventendarstellung. *Für eine quadratische Matrix A und alle λ mit $|\lambda| > ||A||$ gilt*

$$(A - \lambda E)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}(E - \frac{1}{\lambda}A)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}}.$$

Beweis: Für $|\lambda| > ||A||$ ist $||A/\lambda|| < 1$. Aus $(M/\lambda)^{-1} = \lambda M^{-1}$ für invertierbare Matrizen M ergibt sich mit $M = (A - \lambda E)^{-1}$ die Darstellung der *Resolvente* $(A - \lambda E)^{-1}$ *von A im Punkt* λ als Neumann'sche Reihe.

Bemerkung. Man kann zeigen, dass die Darstellung im vorangehenden Satz für alle λ gilt, die $|\lambda| > \max\{|\lambda_k| : \lambda_k \text{ Eigenwert von } A, 1 \leq k \leq n\}$ erfüllen. Man bezeichnet das genannte Maximum als *Spektralradius* $r_\sigma(A)$ von A. Zu Details siehe [1].

Die Laplace-Transformierte von $\mathbf{e}^{\mathbf{At}}$

Die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}(f)$ einer Laplace-transformierbaren Funktion f mit $f(t) = 0$ für $t < 0$ notieren wir durch

$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t.$$

Mit der Einheitssprungfunktion $s(t) = 1$ für $t \geq 0$, $s(t) = 0$ für $t < 0$ ergibt sich nun als komponentenweise zu bildende Laplace-Transformierte der Matrix-Exponentialfunktion $\mathrm{e}^{At}s(t)$ die Matrix $(pE - A)^{-1}$:

Satz 7. *Für eine quadratische Matrix A und alle $p \in \mathbb{C}$ mit $\Re(p) > ||A||$ gilt*

$$\mathrm{e}^{At}s(t) = \mathcal{L}^{-1}((pE - A)^{-1}).$$

Beweis: Nach den obigen Vorbereitungen erhalten wir $|p| > ||A||$ (ausreichend als Voraussetzung auch $\Re(p) > r_\sigma(A)$ nach der letzten Bemerkung), und damit

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\mathrm{e}^{At}s(t)) &= \mathcal{L}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k s(t)}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\mathcal{L}(t^k s(t)) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\frac{k!}{p^{k+1}} = \frac{1}{p}(E - \frac{1}{p}A)^{-1} = (pE - A)^{-1}.
\end{aligned}$$

Da die Komponenten der Exponentialreihe konvergente Potenzreihen sind, dürfen sie gliedweise integriert werden.

Bemerkung. Wie man mit der Cramer'schen Regel erkennt, sind die Komponenten der Matrix $(pE - A)^{-1}$ im vorangehenden Satz echt-rationale Funktionen. Daher sind die Komponenten von $e^{At}s(t)$ Linearkombinationen von Funktionen der Form $t^k \mathrm{e}^{at}s(t)$ mit $k = 0, 1, 2, \ldots$ und $a \in \mathbb{C}$. Mit dem Prinzip der analytischen Fortsetzung ergibt sich daher aus der Berechnung von $\mathrm{e}^{At}s(t) = \mathcal{L}^{-1}((pE - A)^{-1})$ auch die gesamte Matrix-Exponentialfunktion e^{At}, $t \in \mathbb{R}$ beliebig.

Bei größeren Matrizen A benötigt man effektive numerische Algorithmen zur Berechnung der Matrix-Exponentialfunktion. Als guten Einstieg in diese Thematik empfehle ich die Arbeit
C. Moler, C. Van Loan   Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, Twenty Five Years Later   SIAM Review 45, No.1, 2003, pg. 3-49
(http://www.math.unm.edu/ kapitula/courses/math512/MatrixExponential.pdf)

Noch einmal lineare Systeme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die mathematische Beschreibung der zeitlichen Entwicklung von Zustandsvariablen x eines linearen Systems erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten mit Systemmatrix A, das sich zur Zeit $t = 0$ in einem Anfangszustand $x(0) = x_0$ befindet und ab $t = 0$ einer Störung y unterliegt (komponentenweise $y(t) = 0$ für $t < 0$) wird mit dem Dirac-Funktional δ beschrieben durch (vgl. [2])

$$x' = Ax + y + x_0\delta.$$

Gesucht wird (unter Ausblendung der Vergangenheit $t < 0$) die Entwicklung des Zustands für $t \geq 0$. Die Störung y kann im allgemeinen Fall auch eine Distribution mit Träger in $[0, \infty[$ sein.
Ist y Laplace-transformierbar, dann ergibt Laplace-Transformation (im Sinn verallgemeinerter Funktionen, vgl. Vorlesungsteil zur Laplace-Transformation) mit $X(p) = \mathcal{L}(x)$, $Y(p) = \mathcal{L}(y)$ und der Regel für die Laplace-Transformation verallgemeinerter Ableitungen $\mathcal{L}(x') = pX(p)$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} pX(p) &= AX(p) + Y(p) + x_0 \\ (pE - A)X(p) &= Y(p) + x_0 \\ X(p) &= (pE - A)^{-1}(Y(p) + x_0). \end{aligned}$$

Rücktransformation ergibt $x(t)$ als Faltung von $\mathrm{e}^{At}s(t)$ mit der Inhomogenität $y(t) + x_0\delta$. Für stückweise stetige $y(t)$ und $t \geq 0$ also

$$x(t) = \mathrm{e}^{At}s(t)x_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{A(t-\tau)}y(\tau)\mathrm{d}\tau$$

als eindeutige kausale Systemantwort auf die Störung $y(t)$. Die gleiche Lösung erhält man natürlich auch durch Variation der Konstanten.

Referenzen

[1] H. Niemeyer, E. Wermuth Lineare Algebra, Vieweg 1987
[2] R. Brigola Fourier-Analysis und Distributionen, edition swk 2012