Ergänzung: Elementare transzendentale Funktionen

Man definiert $e^z,\ \cos z,\ \sin z$ auf $\mathbb{C}$ durch die Potenzreihen

$\otimes \quad e^z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},\ \cos z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{z^{2k}}{(2k)!},\ \sin z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$

Diese Reihen sind für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent. (Beweis mit dem Quotienten–Kriterium)

1.) Eulergleichung: Es gilt für alle $z \in \mathbb{C} : e^{jz} = \cos z + j \sin z$

Beweis:

a) $\frac{e^{jz}+e^{-jz}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(jz)^k+(-jz)^k}{k!} = \frac{1}{2} \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{j^k \cdot z^k + j^k \cdot (-1)^k \cdot z^k}{k!} =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cos z,\ \text{da } j^k + j^k \cdot (-1)^k = \begin{cases} 2 \text{ für } & k = 0, 4, 8, \ldots \\ -2 & k = 2, 6, 10, \ldots \\ 0 & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

b) Analog: $\frac{e^{jz}-e^{-jz}}{2j} = \sin z$ und $\underbrace{\frac{e^{jz}+e^{-jz}}{2}}_{\cos z} + j \underbrace{\frac{e^{jz}-e^{-jz}}{2}}_{\sin z} = e^{jz}$

2.) Man sieht an den Reihen: $\cos(z) = \cos(-z),\ \sin(z) = -\sin(-z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

3.) Man definiert $\cosh z = \frac{1}{2} \cdot (e^z + e^{-z})$, $\sinh z = \frac{1}{2} \cdot (e^z - e^{-z})$

Diese Hyperbelfunktionen haben die Potenzreihendarstellungen: $\cosh z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$, $\sinh z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$

4.) Beziehungen zwischen trigonometrischen und Hyperbelfunktionen

$\cosh(z) = \cos(jz),\quad \cos(z) = \cosh(jz) \qquad (z \in \mathbb{C})$

$j \sinh(z) = \sin(jz),\ \sin(z) = -j \sinh(jz)$

(folgt sofort aus $\otimes$ und 3.)).

5.) $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z},\ \cot z = \frac{\cos z}{\sin z},\ \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = -j \tan(jz)\ \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} = j \cot(jz)$

6.) Die aus dem Reellen bekannten Beziehungen zwischen trigonometrischen bzw. hyperbolischen Funktionen lassen sich sämtlich ins Komplexe übertragen, insbesondere:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cdot \sin z_2 + \cos z_2 \cdot \sin z_1$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \qquad\qquad \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

7.) Mit $z = x + jy$ und $e^z = e^x \cdot e^{jy} = e^x \cdot (\cos y + j \sin y)$ folgen

a) $|e^z| = e^{Re\ z}$, insbesondere $e^z \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$

b) $\arg(e^z) = Im\ z$

c) $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}\ (e^{z^*} = (e^z)^*)$

8.) Mit den Additionstheoremen 6.) und 4.) rechnet man leicht nach (Übung!)

$\cos z = \cos x \cdot \cosh y - j \sin x \cdot \sinh y\ (z = x + jy)$, und $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$

Damit gilt $\cos z = 0$ nur, wenn z reell; damit Nullstellen von $\cos z$ für $z = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

Entsprechend ist $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$, und Nullstellen von $\sin z$ für $z = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

9.) $e^{z_1} = e^{z_2} \iff e^{Re\ z_1} = e^{Re\ z_2}$ und $\arg(e^{z_1}) = \arg(e^{z_2}) \iff$

$Re\ z_1 = Re\ z_2$ und $Im\ z_1 = Im\ z_2 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

e^z ist also einfach periodisch mit der primitiven Periode $2\pi j$

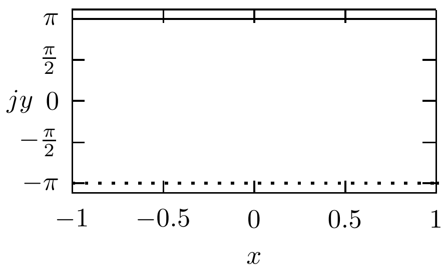
Ähnlich folgt mit den Additionstheoremen aus 6.): $\cos z,\ \sin z$ haben die primitive Periode 2π;

$\tan z,\ \cot z$ die primitive Periode π (wie im Reellen)

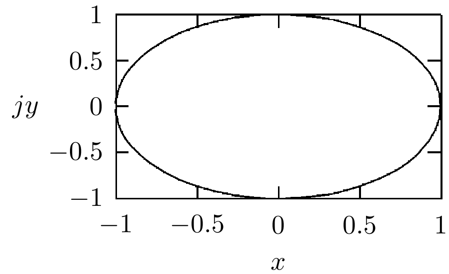
Komplexer Logarithmus

Wegen der $2\pi j-$Periodizität der Exponentialfunktion in der komplexen Ebene betrachtet man die Einschränkung der Exponentialfunktion auf den Streifen $\mathbb{R}\times]-\pi,\pi]$

$$z = x + jy \quad \longrightarrow \quad e^x \cdot e^{jy} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$$



$\overset{\text{exp}}{\longrightarrow}$



$z-$Ebene $\quad \overset{\text{ln}}{\longleftarrow} \quad$ $\omega-$Ebene

$$\underbrace{\ln(|\omega|)}_{\text{reeller Logarithmus}} + j\arg(\omega) = \ln(\omega) \quad \underset{\text{Umkehrabbildung}}{\longleftarrow} \quad \omega = |\omega| \cdot e^{j\arg(\omega)},\ \arg(\omega) \in]-\pi,\pi]$$

Diese Abbildung wird als Hauptwert des komplexen Logarithmus bezeichnet, häufig notiert durch „$\text{Ln}(\omega)$“.
Es gilt: Für $z = x + jy \in \mathbb{R}\times]-\pi,\pi] \subset \mathbb{C}$

$$\ln(e^z) = \ln(e^x \cdot e^{jy}) = \ln(e^x) + jy = x + jy = z$$

und für $\omega \in \mathbb{C}\backslash\{0\},\ \omega = |\omega| \cdot e^{j\arg(\omega)},\ -\pi < \arg(\omega) \le \pi$

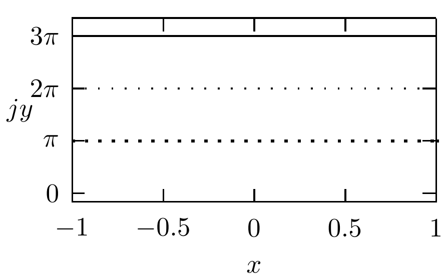
$$e^{\ln(\omega)} = e^{\ln|\omega| + j\arg(\omega)} = |\omega| \cdot e^{j\arg(\omega)} = \omega$$

$$\begin{aligned} \exp:\ \mathbb{R}\times]-\pi,\pi] \subset \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C}\backslash\{0\} \\ z = x + jy &\longrightarrow e^z = e^x \cdot e^{jy} \quad \text{und} \end{aligned}$$

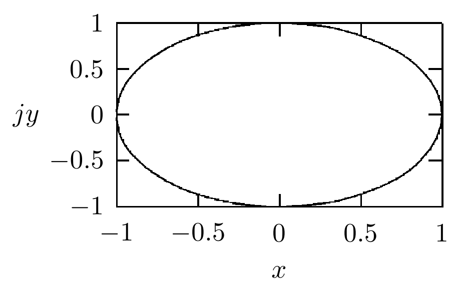
$$\begin{aligned} \ln:\ \mathbb{C}\backslash\{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}\times]-\pi,\pi] \\ \omega = |\omega| \cdot e^{j\arg(\omega)} &\longrightarrow \ln(\omega) = \ln|\omega| + j\arg(\omega) \end{aligned}$$

sind Umkehrfunktionen zueinander.

Wegen der $2\pi j-$Periodizität der komplexen Exponentialfunktion erhält man für jeden Streifen $\mathbb{R}\times]\pi\cdot(2k-1), \pi\cdot(2k+1)] \subset \mathbb{C}$ der komplexen Ebene als Bild „eine Kopie“ $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, $(k \in \mathbb{Z})$



$\overset{\text{exp}}{\longrightarrow}$



$$\text{Z.B.}\, y \in]\pi, 3\pi], z = x + jy \quad \longrightarrow \quad e^z = e^x \cdot e^{jy} = e^x \cdot e^{j(y-2\pi)} \ \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$$

Das Intervall $\{z | Im\ z \in]\pi, 3\pi]\}$ wird dabei auf die Kreislinie $|\omega| = 1$ abgebildet.

Anders gesagt: zu jedem $\omega \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ gibt es abzählbar unendlich viele z mit $e^z = \omega$ wegen der $2\pi j-$Periodizität der Exponentialfunktion.

Für $\omega \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^-$ (geschlitzte $\mathbb{C}$-Ebene), $\omega = |\omega| \cdot e^{j\arg(\omega)}$, $-\pi < \arg(\omega) < \pi$, könnte man daher auch definieren

$$\ln(\omega) = \ln(|\omega|) + j\arg(\omega) + 2\pi kj \in \mathbb{R}\times]\pi(2l-1), \pi(2k+1)[$$

Für $k = 0$ spricht man vom Hauptzweig, andernfalls vom $k-$ten Zweig des komplexen Logarithmus.

Da auch Potenzfunktionen wie a^x, x^α mit der Exponentialfunktion definiert sind, ergeben sich bei deren Fortsetzung ins Komplexe (d.h. komplexe Größen a, x, α) und ihren Umkehrfunktionen analoge Sachverhalte.

In der **Funktionentheorie** (=Theorie komplexer Funktionen) überwindet man die „Vieldeutigkeit" von Funktionen wie $\ln(z)$ usw., indem man als Definitionsbereich nicht mehr ein ebenes Gebiet wie $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ verwendet, sondern sogenannte „**Riemannsche Flächen**".

Bei Interesse bzw. wenn von Ihnen benötigt:
Studium von Literatur der Funktionentheorie, z.B.: Meyberg, Vachenauer; Band II, Kapitel 10
Ernst Peschl; Funktionentheorie
Freitag, Busam; Funktionentheorie
und viele andere mehr: **siehe Bibliothek**