Vorlesungsgrundlage zum Abschnitt über komplexe Zahlen.
Autor: H. Nohl

LaTeX- Fassung: R. Brigola,
Ich danke meinem Kollegen Nohl für die Überlassung seines Materials. Eventuelle Editionsfehler gehen auf mich zurück und werden nach Durchsicht auch von mir korrigiert.
R. Brigola, WS 2006/2007

Komplexe Zahlen

Problem: Viele Gleichungen haben in $\mathbb{R}$ keine Lösung.

$$\text{Ⓑ} \quad x^2 = -1; \quad \bigwedge_{x\in\mathbb{R}} x^2 \geqslant 0 .$$

Ziel: Ein gegenüber $\mathbb{R}$ **erweiterter Zahlenbereich**, der die Lösungen möglichst aller Gleichungen umfasst.

Praxisbezug: Mit „Klimmzügen“ wären komplexe Zahlen oft vermeidbar; dann aber erheblich längere, kompliziertere, fehlerträchtigere Rechnungen.

Mit **komplexen Zahlen und Funktionen** werden Rechnungen eleganter und übersichtlicher.

Ⓑ mechanische/elektromagnetische Schwingungen.

1 Einführung komplexer Zahlen

Ein (möglichst kleiner) Zahlenbereich $\mathbb{C}$,

- der $\mathbb{R}$ umfasst,
- in dem wie in $\mathbb{R}$ addiert und multipliziert wird,
- der die Lösung von $x^2 = -1$ durch ein „neues“ Element $j \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, sog. **imaginäre Einheit** mit $\boxed{j^2 := -1}$, enthält,

hätte die Eigenschaften:

1. $a + j \cdot b \in \mathbb{C}$, falls $a, b \in \mathbb{R}$
2. $a + j \cdot b = x + j \cdot y \Longleftrightarrow a = x \wedge b = y$
(Gleichheit zweier komplexer Zahlen)
3. $(a + j \cdot b) \pm (x + j \cdot y) = (a \pm x) + j \cdot (b \pm y)$
4. $(a + j \cdot b) \cdot (x + j \cdot y) = (ax - by) + j \cdot (ay + bx)$

5. $$\frac{a+j\cdot b}{x+j\cdot y} = \frac{a+j\cdot b}{x+j\cdot y}\cdot\frac{x-j\cdot y}{x-j\cdot y} = \frac{ax+by}{x^2+y^2}+j\cdot\frac{bx-ay}{x^2+y^2}; \quad (x+j\cdot y\neq 0)$$

Zu 1.)

Speziell $b=0$ ergibt die **reellen Zahlen** $a+j\cdot 0 = a+0 = a\in\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.

Speziell $a=0$ ergibt die **imaginären Zahlen** $0+j\cdot b = j\cdot b\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.

Zu 2.)

$$\begin{aligned}
\text{Aus}\quad a+j\cdot b &= x+j\cdot y\\
\Rightarrow\quad a-x &= j\cdot(y-b)\\
\Rightarrow\quad \underbrace{(a-x)^2}_{\geqslant 0} &= \underbrace{-(y-b)^2}_{\leqslant 0}\Rightarrow a-x=0\wedge y-b=0
\end{aligned}$$

Aus $a-x=0\wedge y-b=0$

$\Rightarrow$ unmittelbar $a+j\cdot b = x+j\cdot y$

Zu 5.)

B $$\frac{1-2j}{1+j} = \frac{(1-2j)(1-j)}{(1+j)(1-j)} = \frac{1-j-2j+2j^2}{1-j^2} = \frac{-1-3j}{1+1} = -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}j$$

B $$\frac{1}{j} = \frac{-j}{j(-j)} = \frac{-j}{1} = -j$$

Diese Eigenschaften zeigen, dass $\mathbb{C}$ wie folgt konstruiert werden kann:

Die Elemente der Menge $\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(a,b)|a,b\in\mathbb{R}\}$
mit den Rechenoperationen

$$\begin{aligned}
(a,b)+(x,y) &:= (a+x,b+y)\\
(a,b)\cdot(x,y) &:= (ax-by,ay+bx)
\end{aligned}$$

*heißen **komplexe Zahlen**.*
Ihre Menge wird mit $\mathbb{C}$ *bezeichnet.*

Vereinbaren wir speziell $(a,0)=a$
$j:=(0,1)$

dann gelten

- $(0,0)=0$ und $(1,0)=1$
- $j^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1$
- $$\begin{aligned}(a,b) &= (a,0)+(0,b)\\ &= (a,0)+(0,1)\cdot(b,0)\\ &= a+j\cdot b\end{aligned}$$
- die Eigenschaften 1. bis 5.

Ⓑ In $\mathbb{C}$ hat *jede* quadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$
mit $p, q \in \mathbb{R}$

zwei (nicht notwendig verschiedene) Lösungen,
denn die $\boxed{\text{quadratische Ergänzung}}$

$$\begin{aligned} x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 &= -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \\ \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}_{\text{Diskriminante } D} \end{aligned}$$

führt auf die Fälle

1. $D \geqslant 0$: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \in \mathbb{R}$
2. $D < 0$: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm j \cdot \sqrt{-D} \in \mathbb{C}$

denn

$$\left| \begin{array}{ll} {x_{1,2}}^2 + p \cdot x_{1,2} + q & = \\ \frac{p^2}{4} \mp jp\sqrt{-D} - (-D) - & \\ \frac{p^2}{2} \pm jp\sqrt{-D} + q & = \\ q - \frac{p^2}{4} + D & = 0 \end{array} \right.$$

Bemerkungen:

- **Formal** ergibt sich für $D < 0$:

$$\sqrt{D} = \sqrt{(-1) \cdot (-D)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-D} = j \cdot \sqrt{-D}$$

wobei für j das **Symbol** $\sqrt{-1}$ (in manchen Büchern wird $j = \sqrt{-1}$ behauptet) und *formal* das Wurzelgesetz $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ für $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ benutzt wurde.

Aber Vorsicht: Nicht etwa

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = j \cdot j = -1$$

- Später zeigt sich:
auch Gleichungen der Form $\mathrm{e}^x = -1$ oder $\sin x = 2$ haben Lösungen in $\mathbb{C}$.

2 Gaußsche Zahlenebene

- **Reelle Zahlen** können umkehrbar eindeutig Punkten der **Zahlengeraden** zugeordnet werden.

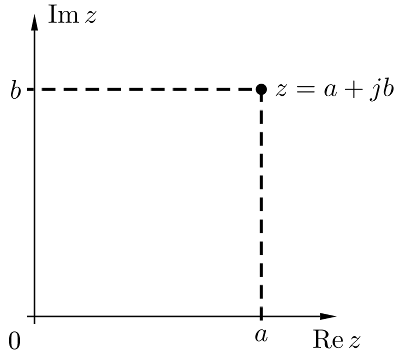
  Geordnete Zahlexpaare (x, y) lassen sich als Punkte in der x, y-**Ebene** veranschaulichen.

- Ebenso gilt für **komplexe Zahlen**:

  Jeder Punkt (a, b) der Ebene mit kartesischen Koordinatensystem ist das Bild genau einer komplexen Zahl $z = a + j \cdot b$.

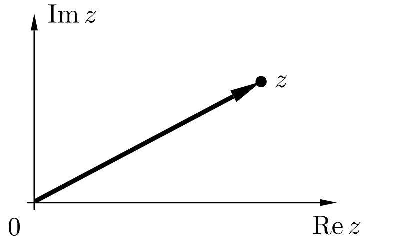
  *Die Ebene heißt **Gaußsche Zahlenebene** oder **komplexe Zahlenebene**.*

  Speziell liegen
  Punkte zu $a + j \cdot 0 = a \in \mathbb{R}$ auf der **reellen Achse „**$\mathrm{Re}\, z$**“**
  Punkte zu $0 + j \cdot b = j \cdot b \notin \mathbb{R}$ auf der **imaginären Achse „**$\mathrm{Im}\, z$**“**.



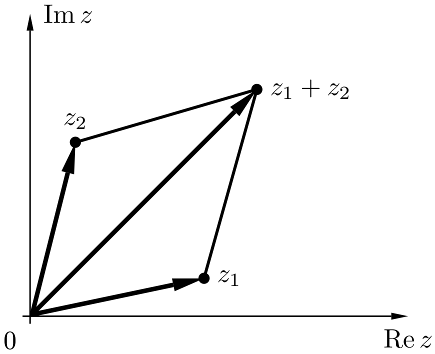
  Darüber hinaus werden **komplexen Zahlen** $z \neq 0$ oft „**Zeiger**“ zugeordnet, die – wie Ortsvektoren – stets im Ursprung beginnen:

  „Zeigerdarstellung komplexer Zahlen“.



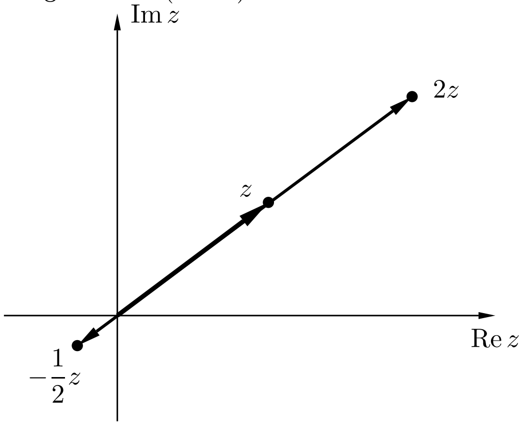
Vorteil:
Einfache Darstellung einiger Rechenoperationen und schnelles intuitives Verständnis von Zusammenhängen möglich:

Addition $z_1 + z_2$
(wie bei Vektoren, vgl. Kräfteparallelogramm)



Multiplikation $a \cdot z, a \in \mathbb{R}$

Zeiger zu z wird verkürzt ($|a| < 1$) oder verlängert ($|a| > 1$); ggf. auch Richtungsumkehr ($a < 0$).

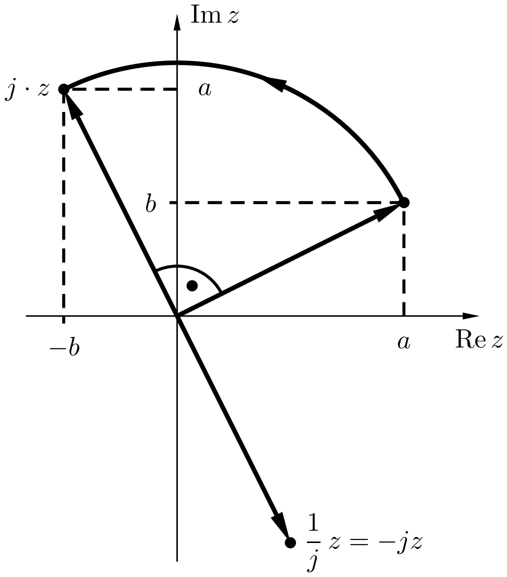


Multiplikation $j \cdot z$

Aus $j \cdot (a + j \cdot b) = -b + j \cdot a$

$\Rightarrow$ Drehung des Zeigers zu $z \neq 0$ um $+90°$.

Analog: $\frac{1}{j} z \mathrel{\hat{=}}$ Drehung des Zeigers um $+270°$ bzw. $-90°$.



Ungleichungen:

Punkte in der Gauß-Ebene und folglich **komplexe Zahlen lassen sich nicht linear anordnen**.
Es gibt keine Ungleichungen im Komplexen.

B $\quad j > 0 \;\Rightarrow\; j \cdot j > j \cdot 0 \Rightarrow -1 > 0?$

$-j < j$

$2j > j$

ist alles sinnlos !

3 Weitere Grundbegriffe

- **Real- und Imaginärteil**

  Für $z = a + j \cdot b \in \mathbb{C}$ nennt man

  $a \in \mathbb{R}$ den **Realteil von** z,

  $b \in \mathbb{R}$ den **Imaginärteil von** z.

  Schreibweisen: $a = \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re} z$,

  $b = \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im} z$.

  Dies entspricht den Bezeichnungen für die Achsen in der Gauß-Ebene.

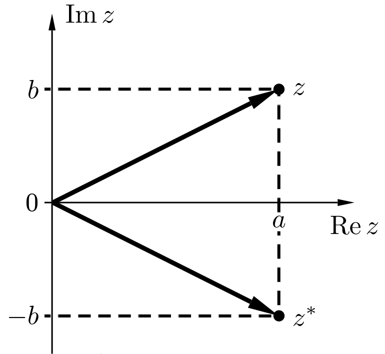
- **Normalform**

  Die Darstellung einer komplexen Zahl in der Form $z = a + j \cdot b$ heißt ihre ***Normalform****.*

  Weitere Darstellungsformen siehe Abschnitt 4.

- **Konjugierte**

  - Die Zahl $z^* := a - j \cdot b$ heißt die zu $z = a + j \cdot b$ **konjugiert komplexe Zahl**.
  - Die Zahlen z und z^* bilden ein **Paar konjugiert komplexer Zahlen**.



Statt z^* ist auch $\bar{z}$ üblich.

Eigenschaften und Rechenregeln:

1. $(z^*)^* = z$

2. $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2} \cdot (z + z^*)$

   $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2j} \cdot (z - z^*)$

3. $z = z^* \iff z \in \mathbb{R}$

   $z = -z^* \iff z$ liegt auf der imaginären Achse, $z = j \operatorname{Im}(z)$

4. $z \cdot z^* = \operatorname{Re}^2(z) + \operatorname{Im}^2(z) \geqslant 0$

5. $$\begin{aligned}(z_1 \pm z_2)^* &= z_1^* \pm z_2^* \\ (z_1 \cdot z_2)^* &= z_1^* \cdot z_2^* \\ \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* &= \frac{{z_1}^*}{{z_2}^*} \text{ für } z_2 \neq 0\end{aligned}$$

6. $(z^n)^* = (z^*)^n$
für alle $n \in \mathbb{N}_0$, wobei $z^0 := 1$ für $z \neq 0$

Nr. 2 ist beim Programmieren nützlich; viele Sprachen kennen keine komplexen Konstanten und Variablen.

Nr. 4 haben wir bereits benutzt:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot {z_2}^*}{z_2 \cdot {z_2}^*} \Rightarrow \text{Normalform (Nenner pos. reell!)}$$

Nr. 6 ergibt sich durch vollständige Induktion:

- $(z^\circ)^* = 1^* = 1 = (z^*)^\circ$
- $$\begin{aligned}(z^n)^* &= (z^*)^n &&\Longleftrightarrow \\ (z^n)^* \cdot z^* &= (z^*)^n \cdot z^* &&\Longleftrightarrow \\ (z^n \cdot z)^* &= (z^*)^{n+1} &&\Longleftrightarrow \\ (z^{n+1})^* &= (z^*)^{n+1} &&\text{für alle } z \neq 0\end{aligned}$$

Ⓑ Schule: $\bigwedge\limits_{a,b \in \mathbb{R}} a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$

FH: $\bigwedge\limits_{a,b \in \mathbb{R}} a^2 + b^2 = (a + j \cdot b)(a - j \cdot b)$

Ⓑ Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt bei $z = \cos x + j \cdot \sin x$ gilt

a) $z = z^*$?

b) $z = -z^*$?

c) $z = \dfrac{1}{z^*}$?

a) $$\begin{aligned}z = z^* &\Longleftrightarrow \sin x = 0 \\ &\Longleftrightarrow x = k \cdot \pi \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}z = -z^* &\Longleftrightarrow \cos x = 0 \\ &\Longleftrightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{2}\,; \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}z = \frac{1}{z^*} &\Longleftrightarrow z \cdot z^* = 1 \\ &\Longleftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \\ &\Longleftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ beliebig}\end{aligned}$$

Ⓑ In welchem Gebiet G der Gauß-Ebene liegen die Punkte zu den komplexen Zahlen z, welche die Bedingung

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z^* + z}{z^* - z}\right) < 1$$

erfüllen ?

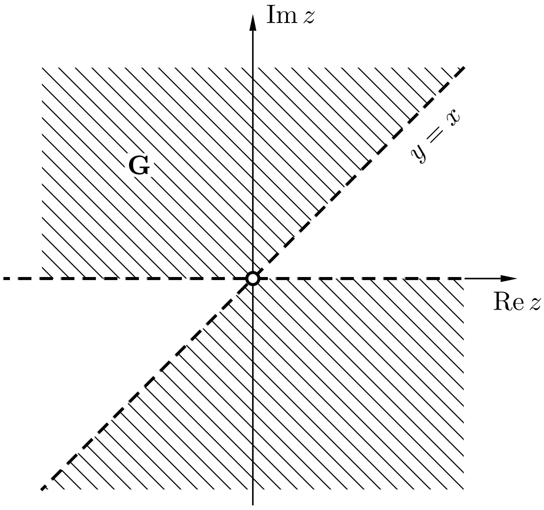
Mit $z = x + j \cdot y$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}\left(\frac{z^* + z}{z^* - z}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{2x}{-2jy}\right); \quad y \neq 0$$

$$= \operatorname{Im}\left(j \cdot \frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y} < 1$$

Also:

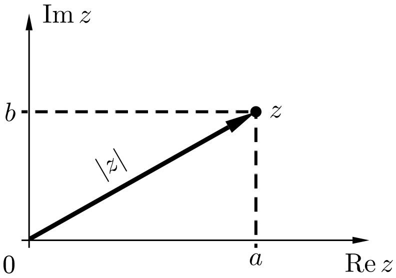
$$y > x, \quad \text{wenn } y > 0$$
$$y < x, \quad \text{wenn } y < 0$$



Betrag
Komplexe Zahlen lassen sich nicht anordnen.
Durch den „Betrag einer komplexen Zahl “ wird jedem $z \in \mathbb{C}$ eine nicht-negative Zahl zugeordnet.
Diese Beträge lassen sich linear anordnen.
Für $z \in \mathbb{C}$ heißt

$$|z| := \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{\operatorname{Re}^2(z) + \operatorname{Im}^2(z)}$$

der Betrag von z.
Anschaulich:
$|z|$ ist der Abstand des Punktes zu z vom Ursprung, **d.h.** die Länge des Zeigers zu z.



Pythagoras: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

B $\quad |j| = \sqrt{j \cdot (-j)} = \sqrt{1} = 1$

$|3 + 4j| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$|\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$

für alle $\varphi \in \mathbb{R}$

Eigenschaften und Rechenregeln

1. $|z| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z = 0$
2. $|z^*| = |z|$
3. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
4. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ mit $z_2 \neq 0$
5. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$
   Dreiecksungleichung
   (Abschätzung von $|z_1 + z_2|$ nach oben)
   $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |z_k|$
6. $|z_1 - z_2| =$ **Abstand der Punkte zu** z_1, z_2

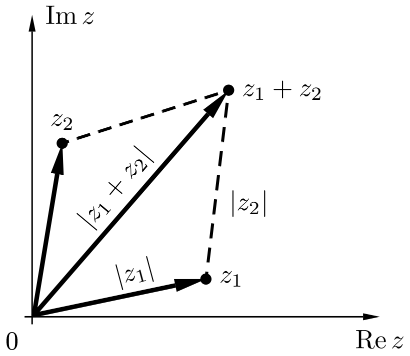
Nur **Nr. 5** wird hier gezeigt.
Beweisen **Sie** die restlichen Eigenschaften!

Beweis der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \cdot (z_1 + z_2)^* = (z_1 + z_2) \cdot ({z_1}^* + {z_2}^*) \\
&= z_1 {z_1}^* + z_1 {z_2}^* + z_2 {z_1}^* + z_2 {z_2}^* \\
&= |z_1|^2 + \underbrace{z_1 {z_2}^* + {z_1}^* z_2}_{\alpha} + |z_2|^2 \\
\text{Mit } \alpha &= z_1 {z_2}^* + (z_1 {z_2}^*)^* \\
&= 2 \cdot \operatorname{Re}(z_1 \cdot {z_2}^*) \\
&\leqslant 2 \cdot \sqrt{\operatorname{Re}^2(z_1 \cdot {z_2}^*) + \operatorname{Im}^2(z_1 \cdot {z_2}^*)} \\
\alpha &\leqslant 2 \cdot |z_1 {z_2}^*| = 2|z_1| \cdot |{z_2}^*| = 2|z_1| \cdot |z_2| \\
\Longrightarrow |z_1 + z_2|^2 &\leqslant \underbrace{|z_1|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| + |z_2|^2}_{(|z_1| + |z_2|)^2}
\end{aligned}$$

Also:

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$



Ⓑ
$$\begin{aligned} |z_1 - z_2| &= |z_1 + (-1)\cdot z_2| \\ &\leqslant |z_1| + |(-1)\cdot z_2| = |z_1| + |-1|\cdot|z_2| \\ &\leqslant |z_1| + |z_2| \end{aligned}$$

Ⓑ **Gesucht ist die Kurve in der Gaußschen Ebene, auf der die Punkte zu**

$$z = 2\cdot(\cos t + j\cdot\sin t)$$

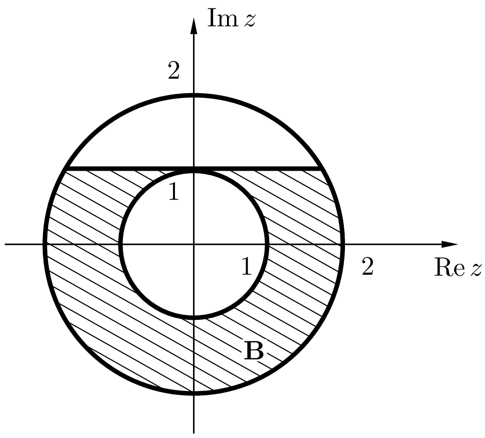
mit $t \in \mathbb{R}$ **liegen**.

$$\begin{aligned} \text{Aus} \quad & z = x + j\cdot y = 2\cos t + j\cdot 2\sin t \\ \Rightarrow \quad & x = 2\cos t \\ & y = 2\sin t \\ \Rightarrow \quad & |z|^2 = x^2 + y^2 = 4\cdot(\cos^2 t + \sin^2 t) = 4 \end{aligned}$$

D.h. **z beschreibt den Kreis um den Ursprung mit Radius** $r = |z| = 2$**.**

Ⓑ In welchem Bereich B der Gaußschen Ebene liegen die Punkte zu z mit

$$\operatorname{Im}(z) \leqslant 1 \quad \wedge \quad 1 \leqslant |z| \leqslant 2 \quad ?$$



Für $z = x + j\cdot y \Rightarrow y \leqslant 1 \wedge 1 \leqslant \sqrt{x^2+y^2} \leqslant 2$

4 Polarform komplexer Zahlen

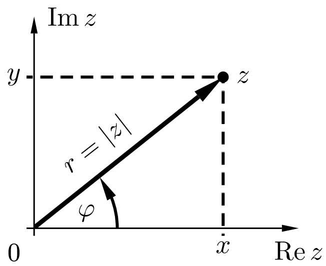
Diese heißt auch **trigonometrische Form**;
ermöglicht

- geometrische Deutung der Multiplikation und Division komplexer Zahlen,
- einfache Berechnung von Potenzen komplexer Zahlen,
- elegante Behandlung periodischer Vorgänge (Schwingungen, Wellen).

Entsprechend den (bereits bekannten) **Polarkoordinaten** (r, φ) ist jedes $z \neq 0$ festgelegt durch:

- Länge $r = |z|$ des Zeigers zu z,
- Winkel φ zwischen der Polarachse (positive reelle Achse) und Zeiger zu z.

$$
\begin{aligned}
\text{Mit } x &= |z| \cdot \cos\varphi \\
y &= |z| \cdot \sin\varphi \\
\Longrightarrow z &= x + j \cdot y \\
&= |z| \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi)
\end{aligned}
$$



Wegen 2π-Periodizität

$$
\begin{aligned}
\sin(\varphi + k \cdot 2\pi) &= \sin\varphi \\
\cos(\varphi + k \cdot 2\pi) &= \cos\varphi, \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

ist φ **nicht eindeutig bestimmt**.
Man legt fest:

- Die Darstellung einer komplexen Zahl $z \neq 0$ in der Form

  $$
  \begin{aligned}
  &z = |z| \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi) \\
  &\text{mit} \quad -\pi < \varphi \leqslant \pi
  \end{aligned}
  $$

  heißt ihre **Polarform**.
- $\varphi = \arg z$ wird das **Argument** oder die **Phase von** z genannt.
- Für $z = 0$ ist φ **unbestimmt**; Sie haben freie Wahl.

Üblich ist auch $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ sowie $\varphi = \text{arc } z$ (**Arcus von** z).
Zur Umrechnung

Normalform $\leftrightarrow$ Polarform:

- Gegeben die **Normalform** $z = x + j \cdot y \neq 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow r &= |z| = \sqrt{x^2+y^2} > 0 \\ \varphi &= \begin{cases} \arccos \frac{x}{r}, & \text{falls } y \geq 0 \\ -\arccos \frac{x}{r}, & \text{falls } y < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

mit arccos die Umkehrfunktion zu $\cos\Big|_{[0,\pi]}$.

- Gegeben die **Polarform** $z = |z| \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x &= |z| \cdot \cos\varphi \\ y &= |z| \cdot \sin\varphi \end{aligned}$$

Ⓑ

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \cdot (\cos 0 + j \cdot \sin 0) \\ j &= 1 \cdot (\cos \frac{\pi}{2} + j \cdot \sin \frac{\pi}{2}) \\ 1 + j &= \sqrt{2} \cdot (\cos 45^\circ + j \cdot \sin 45^\circ) \\ -2 + 3j &\approx 3{,}6 \cdot (\cos 123{,}7^\circ + j \cdot \sin 123{,}7^\circ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{da} \quad |z| &= \sqrt{4+9} \approx 3{,}6 \\ \varphi &= +\arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{13}}\right) \approx 123{,}7^\circ \end{aligned}$$

Ⓑ $z = 2 \cdot (\cos 60^\circ - j \cdot \sin 45^\circ)$ ist **keine** Polarform von z.

$$\begin{aligned} \text{Mit } z &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - j \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 1 - j \cdot \sqrt{2} \\ \Rightarrow z &\approx 1,7 \cdot (\cos(-54{,}7^\circ) + j \cdot \sin(-54{,}7^\circ)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{da } |z| &= \sqrt{1+2} \approx 1,7 \\ \varphi &= -\arccos \frac{1}{\sqrt{3}} \approx -54{,}7^\circ \end{aligned}$$

In **Technik** üblich:

$$\underline{/\varphi} := \cos\varphi + j \cdot \sin\varphi$$

sprich **Versor** φ.

Mit diesem **Symbol** heißt $z = |z|\underline{/\varphi}$ „**Betrag von** z **Versor** φ“.

Eigenschaften und Rechenregeln

1. $\cos(\varphi + k \cdot 2\pi) + j \cdot \sin(\varphi + k \cdot 2\pi)$
   $= \cos\varphi + j \cdot \sin\varphi \qquad (2\pi - \text{Periodizität})$

2. $|\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi| = 1$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$

3. $$\begin{aligned} \text{Aus } z &= |z| \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi) = |z|\underline{/\varphi} \\ \Rightarrow z^* &= |z| \cdot (\cos\varphi - j \cdot \sin\varphi) \\ &= |z| \cdot (\cos(-\varphi) + j \cdot \sin(-\varphi)) = |z|\underline{/-\varphi} \end{aligned}$$

4. Für $z_1 = |z_1| \cdot (\cos\varphi_1 + j \cdot \sin\varphi_1) \neq 0$

$z_2 = |z_2| \cdot (\cos\varphi_2 + j \cdot \sin\varphi_2) \neq 0$

gilt

$$
\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= |z_1| \cdot |z_2| \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_z)] \\
&= |z_1| \cdot |z_2| \, \underline{\angle \varphi_1 + \varphi_2}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \\
&= \frac{|z_1|}{|z_2|} \, \underline{\angle \varphi_1 - \varphi_2}
\end{aligned}
$$

Merke: Bei **Multiplikation** werden

die **Beträge multipliziert**,

die **Phasen addiert**.

Bei **Division** werden

die **Beträge dividiert**,

die **Phasen subtrahiert**.

denn

$$
\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{|z_2|^2} \\
&= \frac{|z_1||z_2|}{|z_2|^2} \cdot (\cos\varphi_1 + j \cdot \sin\varphi_1) \cdot (\cos\varphi_2 - j \cdot \sin\varphi_2) \\
&= \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + j(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_2 \cos\varphi_1)) \\
&= \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \\
&= \frac{|z_1|}{|z_2|} \, \underline{\angle \varphi_1 - \varphi_2}
\end{aligned}
$$

für $z_1, z_2 \neq 0$

Geometrisch bedeutet $z_1 \cdot z_2$ eine

Drehung des Zeigers zu z_1 um φ_2

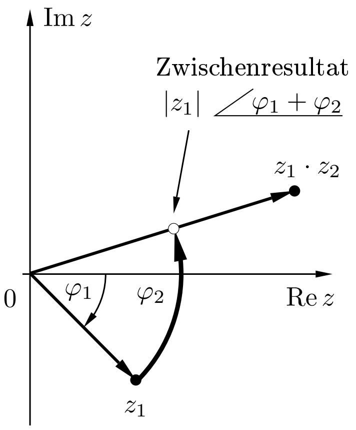
und

Streckung des Zeigers zu z_1 mit $|z_2|$, sogenannte **Drehstreckung**.

B

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 1 - j = \sqrt{2} \, \underline{\angle -45^\circ} \\
z_2 &= 1 + j \cdot \sqrt{3} = 2 \, \underline{\angle 60^\circ}
\end{aligned}
$$

$$
z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2} \, \underline{\angle 15^\circ}\,; \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \, \underline{\angle -105^\circ}
$$



hier:

1. Drehung um $+60°$,
2. Streckung mit Faktor 2.

Ⓑ
$$\begin{aligned} z^2 &= z \cdot z \\ &= |z|^2[\cos(\varphi + \varphi) + j \cdot \sin(\varphi + \varphi)] \\ &= |z|^2 \,\underline{/2\varphi} \end{aligned}$$

Offenbar gilt allgemein:

$$\begin{aligned} z^n &= |z|^n \cdot (\cos n\varphi + j \cdot \sin n\varphi) \\ &= |z|^n \,\underline{/n\varphi} \end{aligned}$$

für $z \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$

(**Gesetz von Moivre**)

Kann leicht mit vollständiger Induktion und Produktformel gezeigt werden; siehe auch den nächsten Abschnitt.

Speziell

$$\begin{aligned} (1-j)^6 &= \left\{\sqrt{2} \cdot \left[\cos(-\frac{\pi}{4}) + j \cdot \sin(-\frac{\pi}{4})\right]\right\}^6 \\ &= 8 \cdot \left[\cos\left(-\frac{6\pi}{4}\right) + j \cdot \sin\left(-\frac{6\pi}{4}\right)\right] \\ &= 8 \cdot (0 + j \cdot 1) \\ &= 8j \end{aligned}$$

5 Exponentialform komplexer Zahlen

Roter Faden:

- Einführung der komplexen e-Funktion $e^{j \cdot x}$
- Zusammenhang mit $\cos x + j \cdot \sin x$: **Euler**
- Exponentialform
- Beispiele: Moivre, harmonische Schwingungen

- $\mathbf{e^{jx}}$**:** Von den „Reihen" her ist die **reelle** e-**Funktion bekannt**.

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Später **(Taylor-Reihen)** wird gezeigt:

$$\begin{aligned}
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \cdots ; x \in \mathbb{R} \\
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots ; x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Diese Reihen sind sehr ähnlich.
Wesentliches von $\cos x$, $\sin x$ „steckt" in e^x.
Gibt es einen Zusammenhang ? **Ja!**
Herleitung:

1. Erweiterung des Konvergenzbegriffs **reeller** Reihen auf **komplexe Reihen**:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + j \cdot b_k) \text{ mit } a_k, b_k \in \mathbb{R} \text{ für } k = 0, 1, 2, \ldots$$

heißt **konvergent gegen** $a + j \cdot b \in \mathbb{C}$, genau dann, wenn die reellen Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergieren.
Dann gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + j \cdot b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + j \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k = a + j \cdot b.$$

2. Fortsetzung von e^x ins **Komplexe** durch (zunächst formales) Ersetzen von x durch $j \cdot x$:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{jx} : &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(j \cdot x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} j^k \cdot \frac{x^k}{k!} \\ &= 1 + j \cdot x - \frac{x^2}{2!} - j \cdot \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \pm \cdots \end{aligned}$$

Die Reihe zu e^{jx} konvergiert für beliebige $x \in \mathbb{R}$, denn für Partialsummen gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(j \cdot x)^k}{k!} &= \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] \\ &\quad + j \cdot \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!}}_{\downarrow n \to \infty \atop \cos x} + j \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\downarrow n \to \infty \atop \sin x} \end{aligned}$$

Der angekündigte Zusammenhang liegt vor und heißt

- **Eulersche Formel**:

$$\mathrm{e}^{jx} = \cos x + j \cdot \sin x \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

Bemerkungen:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-jx} &= \cos(-x) + j \cdot \sin(-x) \\ &= \cos x - j \cdot \sin x \end{aligned}$$

Allgemein wird die **komplexe Exponentialfunktion** definiert durch :

$$\mathrm{e}^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}; z \in \mathbb{C}$$

mit den Eigenschaften:

1. die Reihe **konvergiert absolut** für jedes $z \in \mathbb{C}$,
2. es gilt die **Funktionalgleichung**

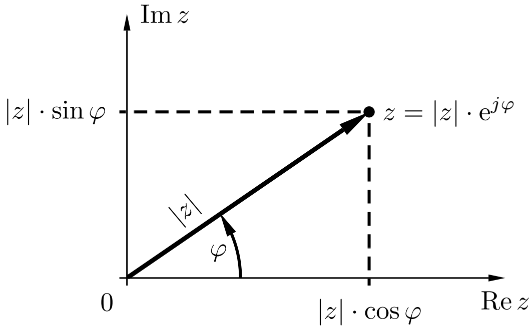
$$\mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^w = \mathrm{e}^{z+w} \quad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C},$$

denn in $\mathbb{C}$ wird wie in $\mathbb{R}$ gerechnet, so dass Binomialsatz, Produkt absolut konvergenter Reihen, Quotientenkriterium usw. wie in $\mathbb{R}$ gelten und die Beweise exakt wie für e^x im Reellen geführt werden können.
Nun **Polarform** $z = |z| \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi)$
+ **Euler**
$\Rightarrow$

Exponentialform komplexer Zahlen

$$z = |z| \cdot \mathrm{e}^{j\varphi} \quad \text{mit } \varphi = \arg z\,.$$

Jetzt wird das Rechnen in $\mathbb{C}$ sehr leicht.



- **Beispiele**:

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= |z_1| \cdot \mathrm{e}^{j\varphi_1} \cdot |z_2| \cdot \mathrm{e}^{j\varphi_2} = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \mathrm{e}^{j(\varphi_1+\varphi_2)} \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1| \cdot \mathrm{e}^{j\varphi_1}}{|z_2| \cdot \mathrm{e}^{j\varphi 2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \mathrm{e}^{j(\varphi_1-\varphi_2)} \quad \text{mit } z_1, z_2 \neq 0 \\
z^n &= |z|^n \cdot (\mathrm{e}^{j\varphi})^n = |z|^n \cdot \mathrm{e}^{jn\varphi} \\
&= |z|^n \cdot (\cos n\varphi + j \cdot \sin n\varphi) \quad \text{für } z \neq 0, n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Ⓑ Speziell für $|z| = 1 \quad \Rightarrow$
Moivre-Formel:

$$(\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi)^n = \cos n\varphi + j \cdot \sin n\varphi \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}$$

Ⓑ

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{j\cdot 0} &= \mathrm{e}^0 = 1 \\
\mathrm{e}^{j\pi} &= \cos\pi + j \cdot \sin\pi = -1 \qquad \boxed{\mathrm{e}^{j\pi} + 1 = 0} \\
\mathrm{e}^{jn\cdot\pi} &= (\mathrm{e}^{j\pi})^n = (-1)^n; \quad n \in \mathbb{Z} \\
\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{2}} &= \cos\frac{\pi}{2} + j \cdot \sin\frac{\pi}{2} = j \\
\mathrm{e}^{z+j\cdot n\cdot 2\pi} &= \mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^{j\cdot n 2\pi} \\
&= \mathrm{e}^z \cdot (\mathrm{e}^{j\pi})^{2n} \\
&= \mathrm{e}^z \cdot (-1)^{2n} \\
&= \mathrm{e}^z\,; z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

($2\pi j$- Periodizität der komplexen e-Funktion)

Ⓑ

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{e}^{j\varphi} - \mathrm{e}^{-j\varphi}}{2j} &= \frac{\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi - (\cos\varphi - j \cdot \sin\varphi)}{2j} \\
&= \sin\varphi \\
\frac{\mathrm{e}^{j\varphi} + \mathrm{e}^{-j\varphi}}{2} &= \frac{\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi + \cos\varphi - j \cdot \sin\varphi}{2} \\
&= \cos\varphi
\end{aligned}$$

Ⓑ
$$\begin{aligned}(1-j)^6 &= (\sqrt{2}\cdot \mathrm{e}^{-j45^\circ})^6\\ &= 8\cdot \mathrm{e}^{-j270^\circ}\\ &= 8\cdot \mathrm{e}^{j(-270^\circ+360^\circ)}\\ &= 8\cdot \mathrm{e}^{j^{90^\circ}} = 8j\\ \left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^9 &= \left(1\cdot \mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{3}}\right)^9\\ &= \mathrm{e}^{-j6\pi} = \mathrm{e}^{j(-6\pi+6\pi)}\\ &= \mathrm{e}^0 = 1\end{aligned}$$

Ⓑ Aus $(\cos\varphi + j\cdot\sin\varphi)^2 = \cos 2\varphi + j\cdot \sin 2\varphi$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \cos^2\varphi - \sin^2\varphi &= \cos 2\varphi\\ &\quad \text{für die Realteile}\\ 2\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi &= \sin 2\varphi\\ &\quad \text{für die Imaginärteile}\end{aligned}$$

Ⓑ Aus $\mathrm{e}^{j\varphi_1}\cdot \mathrm{e}^{j\varphi_2} = \mathrm{e}^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$
d.h. $(\cos\varphi_1 + j\cdot\sin\varphi_1)\cdot(\cos\varphi_2 + j\cdot\sin\varphi_2)$
$= \cos(\varphi_1+\varphi_2) + j\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2)$
$\Rightarrow$ $\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2$
$= \cos(\varphi_1+\varphi_2)$ für die Realteile
$\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\cdot\sin\varphi_1$
$= \sin(\varphi_1+\varphi_2)$ für die Imaginärteile

Vertraute Formeln aus der Schulzeit.

Ⓑ Praxisbezug:

Überlagerung von zwei harmonischen Schwingungen gleicher Kreisfrequenz ω und Schwingungsrichtung:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \hat{x}_1\cdot\cos(\omega t+\varphi_1) = \mathrm{Re}\,(\hat{x}_1\cdot \mathrm{e}^{j(\omega t+\varphi_1)})\\ x_2(t) &= \hat{x}_2\cdot\cos(\omega t+\varphi_2) = \mathrm{Re}\,(\hat{x}_2\cdot \mathrm{e}^{j(\omega t+\varphi_2)})\end{aligned}$$

ergibt

$$\begin{aligned}x(t) &= x_1(t)+x_2(t)\\ &= \mathrm{Re}\,(\underbrace{\hat{x}_1\cdot \mathrm{e}^{j(\omega t+\varphi_1)} + \hat{x}_2\cdot \mathrm{e}^{j(\omega t+\varphi_2)}}_{\underline{x}(t)})\end{aligned}$$

mit der **komplexen Schwingungsfunktion**

$$\underline{x}(t) = (\hat{x}_1\cdot \mathrm{e}^{j\varphi_1} + \hat{x}_2\cdot \mathrm{e}^{j\varphi_2})\cdot \mathrm{e}^{j\omega t}$$

In techn. Lit.: komplexe Größen werden unterstrichen.

Faktor e^{jwt}: es entsteht wieder eine harmonische Schwingung derselben Kreisfrequenz ω.

Klammerausdruck:

$$\hat{x}_1 \cdot \mathrm{e}^{j\varphi_1} + \hat{x}_2 \cdot \mathrm{e}^{j\varphi_2} =: \hat{x} \cdot \mathrm{e}^{j\varphi}$$

wobei $\hat{x}$: **Amplitude**
φ: **Nullphasenwinkel**
der resultierenden Schwingung.

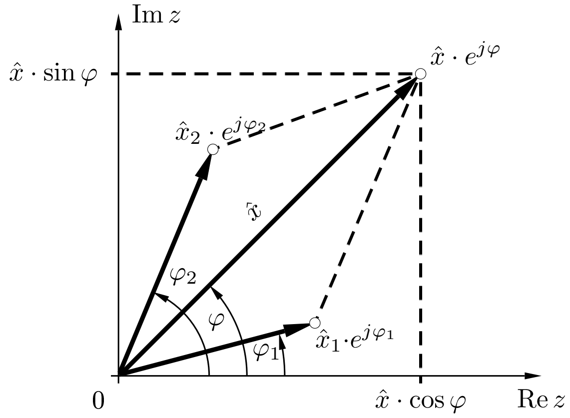
Mit

$$\begin{aligned}
&\hat{x}_1 \cdot (\cos\varphi_1 + j \cdot \sin\varphi_1) + \hat{x}_2 \cdot (\cos\varphi_2 + j \cdot \sin\varphi_2) \\
&\quad = \underbrace{\hat{x}_1 \cdot \cos\varphi_1 + \hat{x}_2 \cdot \cos\varphi_2}_{\hat{x} \cdot \cos\varphi} + j \cdot \underbrace{(\hat{x}_1 \cdot \sin\varphi_1 + \hat{x}_2 \cdot \sin\varphi_2)}_{\hat{x} \cdot \sin\varphi} \\
&\Rightarrow \quad \hat{x} \cdot \cos\varphi = \hat{x}_1 \cdot \cos\varphi_1 + \hat{x}_2 \cdot \cos\varphi_2 \\
&\qquad\ \ \hat{x} \cdot \sin\varphi = \hat{x}_1 \cdot \sin\varphi_1 + \hat{x}_2 \cdot \sin\varphi_2
\end{aligned}$$

Quadrieren und addieren:

$$\hat{x}^2 = \hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 + 2\hat{x}_1\hat{x}_2 \cdot \underbrace{(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2)}_{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\hat{x} = +\sqrt{\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 + 2\hat{x}_1\hat{x}_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$



Aus **Zeigerdiagramm** und Umrechnungsformel (Normalform ↔ Polarform)
$\Rightarrow$

$$\varphi \;=\; S \cdot \arccos \frac{\hat{x}_1 \cdot \cos\varphi_1 + \hat{x}_2 \cdot \cos\varphi_2}{\hat{x}}$$
$$\text{mit } S := \operatorname{sign}\,(\hat{x}_1 \cdot \sin\varphi_1 + \hat{x} \cdot \sin\varphi_2)$$

Also:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \mathrm{Re}\,(\underline{x}(t)) \\
&= \mathrm{Re}\,(\hat{x}\,\mathrm{e}^{j\varphi} \cdot \mathrm{e}^{j\omega t}) \\
&= \mathrm{Re}\,(\hat{x} \cdot \mathrm{e}^{j(\omega t + \varphi)}) \\
x(t) &= \hat{x} \cdot \cos(\omega t + \varphi)
\end{aligned}$$

Bemerkungen:

- **Zeigerdiagramm** beschreibt Schwingungszustand zur Zeit $t = 0$.

  Zeiger zu $\hat{x}_1 \cdot \mathrm{e}^{j\varphi_1}$, $\hat{x}_2 \cdot \mathrm{e}^{j\varphi_2}$, $\hat{x} \cdot \mathrm{e}^{j\varphi}$ heißen **Festzeiger**, ihre Lage ist zeitlich unverändert (fest).

- Zeiger zu $\hat{x}_{1,2} \cdot \mathrm{e}^{j(\omega t+\varphi_{1,2})}$, $\hat{x} \cdot \mathrm{e}^{j(\omega t+\varphi)}$ heißen **Drehzeiger**, sie rotieren bei laufender Zeit t gleichmäßig ($\omega =$ konst.) um den Ursprung.

  Ihre **Projektion**
  auf $\operatorname{Re} z$ stellt die jeweilige harmonische Schwingung $x_{1,2}(t), x(t)$ dar,
  auf $\operatorname{Im} z$ beschreibt – um $\frac{\pi}{2}$ phasenverschoben – ebenfalls die Schwingungen.

- **Praxis:** z.B. Überlagerung zweier Spannungen durch räumlich verschobene, in Reihe geschaltete Ständerwicklungen einer Synchronmaschine.

6 n-te Wurzeln einer komplexen Zahl

Wir **kennen** die im allgemeinen komplexen Lösungen von

$w^2 = a \quad$ mit $a \in \mathbb{R}$:

$a \geqslant 0$: $\quad w_1 = +\sqrt{a}, \quad w_2 = -\sqrt{a}$

$a < 0$: $\quad w_1 = j \cdot \sqrt{|a|}, \quad w_2 = -j \cdot \sqrt{|a|}$

Wir **suchen** nun die komplexen Lösungen von

z.B. $w^2 = j$,

allg. $\boxed{w^n = z}$ mit $n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}$.

Wir **nennen** **jede Zahl** $w \in \mathbb{C}$,

für die $w^n = z$ **gilt,**

eine n-te Wurzel aus z.

Wir **wissen** $w = |w| \cdot \mathrm{e}^{j\alpha}$

$z = |z| \cdot \mathrm{e}^{j\varphi} = |z| \cdot \mathrm{e}^{j(\varphi+k\cdot 2\pi)}; \quad k \in \mathbb{Z}$.

Dies führt zu

$w^n = z \Leftrightarrow |w|^n \cdot \mathrm{e}^{jn\alpha} = |z| \cdot \mathrm{e}^{j(\varphi+k\cdot 2\pi)}$

- Vergleich der Beträge:
  $|w|^n = |z|$, d.h. $|w| = \sqrt[n]{|z|} \in \mathbb{R}$

- Vergleich der Argumente:
  $n \cdot \alpha_k = \varphi + k \cdot 2\pi$, d.h. $\alpha_k = \frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}$

  Für $k = 0, 1, \ldots, n-1$ gibt es n **verschiedene** Winkel α_k und zugehörige **n-te Wurzeln** $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$.

  Für $k = n$, $n+1, \ldots$ gibt es bereits erfasste Wurzeln; z.B. für $k = n$:

$$\begin{aligned} w_n &= \sqrt[n]{|z|} \cdot \mathrm{e}^{j(\frac{\varphi}{n}+n\cdot\frac{2\pi}{n})} \\ &= \sqrt[n]{|z|} \cdot \mathrm{e}^{j\frac{\varphi}{n}} = w_0 \end{aligned}$$

- **Resultat:**

  Die Gleichung $w^n = z$ mit $z = |z| \cdot e^{j\varphi} \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ hat n Lösungen

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{j(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n})} \quad \textit{für } k = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

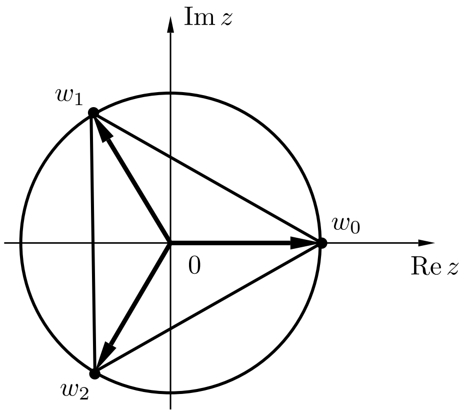
Ⓑ $w^2 = 1 = 1 \cdot e^{j \cdot 0}$

$$\begin{aligned} w_k &= \sqrt{1} \cdot e^{j(0 + k \cdot \frac{2\pi}{2})}\,; \quad k = 0, 1 \\ w_0 &= 1 \cdot e^{j \cdot 0} = 1 \\ w_1 &= 1 \cdot e^{j\pi} = -1 \end{aligned}$$

Ⓑ $w^3 = 1$ hat die Lösungen

$$\begin{aligned} w_k &= \sqrt[3]{1} \cdot e^{j(0 + k \cdot \frac{2\pi}{3})}\,; \quad k = 0, 1, 2 \\ w_0 &= e^{j0} = 1 \\ w_1 &= e^{j\frac{2\pi}{3}} = \cos 120^\circ + j \cdot \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ w_2 &= e^{j\frac{4\pi}{3}} = \cos 240^\circ + j \cdot \sin 240^\circ = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

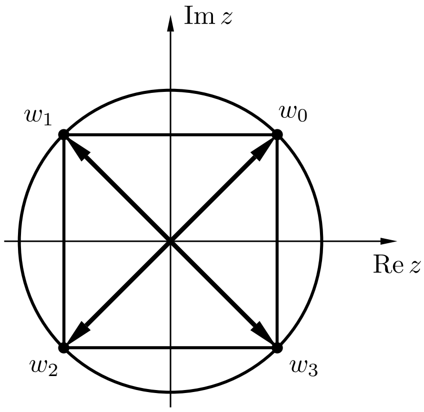
also $w_2 = w_1^*$.



Anschaulich: Lösungen liegen auf Kreis um 0 mit $r = \sqrt[n]{|z|}$, bilden für $n \geqslant 3$ regelmäßiges n-Eck.

Ⓑ $w^4 = -1 = e^{j\pi}$

$$\begin{aligned} w_k &= \sqrt[4]{1} \cdot e^{j(\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{2\pi}{4})}\,; \quad k = 0, 1, 2, 3 \\ w_0 &= e^{j\frac{\pi}{4}} &&= +\frac{1}{\sqrt{2}} + j \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ w_1 &= e^{j\frac{3\pi}{4}} &&= -\frac{1}{\sqrt{2}} + j \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ w_2 &= e^{j(\frac{\pi}{4} + \pi)} &&= e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j\pi} = -w_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}} \\ w_3 &= e^{j\frac{7\pi}{4}} &&= e^{j\frac{3\pi}{4}} \cdot e^{j\pi} = -w_1 = +\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$



Beachte auch hier: $w_2 = w_1^*$
$w_3 = w_0^*$

Ⓑ $w^2 = j = \mathrm{e}^{j\frac{\pi}{2}}$

$$\begin{aligned} w_k &= \sqrt{1} \cdot \mathrm{e}^{j(\frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{2})}; \quad k = 0, 1 \\ w_0 &= \mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + j \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ w_1 &= \mathrm{e}^{j(\frac{\pi}{4} + \pi)} = -\,\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}} = -w_0 \end{aligned}$$

Man beachte hier: $w_0 \neq w_1^*$

Ⓑ Suche alle Lösungen der quadratischen Gleichung

$$z^2 + pz + q = 0.$$

- Falls $p, q \in \mathbb{R}$, dann gilt bekanntlich
(siehe Abschnitt „Exponentialform komplexer Gleichungen")
mit $D := \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}, && \text{wenn } D \geq 0 \\ z_{1,2} &= -\frac{p}{2} \pm j \cdot \sqrt{-D}, && \text{wenn } D < 0 \end{aligned}$$

- Falls $p, q \in \mathbb{C}$ ergibt quadratische Ergänzung

$$\left(z + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

Mit $D := \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = |D| \cdot \mathrm{e}^{j(\varphi_D + k \cdot 2\pi)}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow z_1 &= -\frac{p}{2} + \sqrt{|D|} \cdot \mathrm{e}^{j\frac{\varphi_D}{2}} \\ z_2 &= -\frac{p}{2} + \sqrt{|D|} \cdot \mathrm{e}^{j(\frac{\varphi_D}{2} + \pi)} \\ &= -\frac{p}{2} - \sqrt{|D|} \cdot \mathrm{e}^{j\frac{\varphi_D}{2}} \end{aligned}$$

$$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{|D|} \cdot \mathrm{e}^{j\frac{\varphi_D}{2}}$$

Darin ist obiger Fall enthalten.

7 Komplexe Polynome, Fundamentalsatz der Algebra

Wir wollen hier

- **Komplexe Polynome** $P(z)$ einführen,
- auf deren **Nullstellen** eingehen (weil sie auch die **Lösungen** der zugehörigen algebraischen Gleichung $P(z) = 0$ sind),
- Polynome „**in Linearfaktoren zerlegen**“ (weil man dies z.B. bei der Integration von Polynombrüchen benötigt).

In Analogie zum reellen Polynom definiert man:

1. Für $n \in \mathbb{N}$ und
   $a_0, a_1, \ldots, a_n$ **komplexe Zahlen mit** $a_n \neq 0$
   heißt die Funktion
   $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit
   $$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot z^k = a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \cdots + a_0$$
   komplexes Polynom n**-ten Grades mit** (im Allgemeinen) **komplexen Koeffizienten** a_k.
2. Die komplexe Zahl z_1 heißt **Nullstelle von** $P(z)$, wenn $P(z_1) = 0$ ist.
3. z_1 heißt k**-fache Nullstelle** (oder Nullstelle der Vielfachheit k), wenn es ein Polynom $R(z)$ vom Grad $n - k$ gibt mit der Eigenschaft
   $$P(z) = (z - z_1)^k \cdot R(z) \quad \text{mit } R(z_1) \neq 0\,.$$
   Den Faktor $(z - z_1)$ nennt man **Linearfaktor**.

Wieviele Nullstellen hat $P(z)$?

Dies beantwortet der **Fundamentalsatz der Algebra.**
Er kann so formuliert werden:
Jedes Polynom $\mathbf{n}$*-ten Grades* $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot z^k$ *mit (i.Allg.) komplexen Koeffizienten* a_k *kann ganz in Linearfaktoren zerlegt werden:*

$$\begin{aligned} P(z) &= a_n \cdot \prod_{i=1}^{n} (z - z_i) \\ &= a_n \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n). \end{aligned}$$

Die (i.Allg.) komplexen Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sind die Nullstellen von $P(z)$ und brauchen nicht alle verschieden sein.
Wie findet man $z_1, z_2, \ldots, z_n$ **?**
Mit numerischen **Näherungsverfahren** auf dem Computer.
Manchmal – hier ausgewählte Übungsbeispiele –

helfen das **Raten** von Nullstellen und
die beiden folgenden **Sätze:**

1. Sind **alle Koeffizienten** a_k **reell** und ist z_1 eine Nullstelle von $P(z)$, dann ist auch z_1^* eine Nullstelle.

2. Ist z_1 eine Nullstelle, dann führt die „Abspaltung des Linearfaktors" $(z-z_1)$ durch **Polynomdivision** zu einem Polynom $R(z)$ vom Grad $n-1$.

Denn 1.
$$\begin{aligned} P(z_1^*) &= \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (z_1^*)^k &&= \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (z_1^k)^* \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k^* \cdot (z_1^k)^* &&= \sum_{k=0}^{n} (a_k \cdot z_1^k)^* \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot z_1^k \right)^* &&= 0^* = 0 \end{aligned}$$

2. folgt unmittelbar aus Fundamentalsatz; es verbleibt „nur noch" das Auffinden der $n-1$ Nullstellen von $R(z)$.

Ⓑ $P(z) = z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 5$

- **Erraten:** $z_1 = j$ ist eine Nullstelle; Probe durch Einsetzen.
- **Alle** a_k **reell** $\Rightarrow z_2 = z_1^* = -j$ ist eine weitere Nullstelle
- **Polynomdivision**:

$$\frac{P(z)}{(z-z_1)\cdot(z-z_2)} = \frac{z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 5}{(z-j)\cdot(z+j)}$$

$$\begin{array}{llllll} (z^4 & -4z^3 & +6z^2 & -4z & +5): (z^2+1) = & \underbrace{z^2 - 4z + 5}_{R(z)} \\ z^4 & & +\ z^2 & & & \\ \hline & -4z^3 & +5z^2 & -4z & +5 & \\ & -4z^3 & & -4z & & \\ \hline & & 5z^2 & + & 5 & \\ & & 5z^2 & + & 5 & \\ \hline & & & & 0 & \text{(Kontrolle !)} \end{array}$$

- $R(z) = z^2 - 4z + 5$ hat die Nullstellen $z_{3,4} = 2 \pm j$
- **Resultat** ist die **Linearfaktor-Zerlegung**

$$P(z) = (z-j)\cdot(z+j)\cdot(z-2-j)\cdot(z-2+j)$$

Bemerkungen:

- Vorgehen bei **Linearfaktor -Zerlegung**:
  Auffinden einer Nullstelle z_1 von $P(z)$,
  Zerlegung $P(z) = (z-z_1)\cdot R_{n-1}(z)$,
  falls $n-1 \geqslant 1$: Ermittlung einer Nullstelle z_2 von $R_{n-1}(z)$,
  Zerlegung $P(z) = (z-z_1)\cdot(z-z_2)\cdot R_{n-2}(z)$, usw.

- Kenner wissen: mit dem **Horner-Schema** werden die Rechnungen übersichtlich, ökonomisch und programmierbar.
- Vorlesung mit Übungen **„Numerische Mathematik“** als Wahlfach/Wahlpflichtfach in höheren Sernestern?

8 Ortskurven

Treten in physikalisch-technischen Anwendungen auf
(insbesonders E-Technik, Regelungstechnik),

beschreiben komplexwertige Funktionen $z(t)$, die nur von einem **reellen Parameter** t (z.B. Zeit, Frequenz) abhängen,

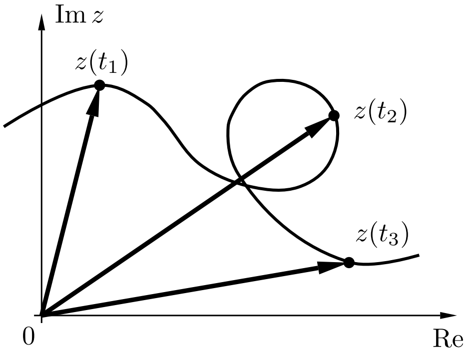
geben – in der Gaußschen Ebene dargestellt – einen guten Überblick über das Verhalten von $z(t)$ für einen **Parameterbereich I**.

Definition

Der Graph einer komplexwertigen Funktion

$$z : I \to \mathbb{C} \qquad \text{mit } I \subset \mathbb{R}$$
$$\text{und } z(t) = x(t) + j \cdot y(t),$$
$$x, y \text{ stetige reelle Funktionen}$$

in der Gaußschen Ebene heißt **Ortskurve**.



Ortskurve = Bahnkurve, welche die Spitze des Zeigers zu $z(t)$ durchläuft.
$z(t)$ lässt sich auch in der Form

$$\begin{aligned} z(t) &= |z(t)| \cdot (\cos\varphi(t) + j \cdot \sin\varphi(t)) \\ &= \underbrace{|z(t)|}_{r(t)} \cdot \mathrm{e}^{j\varphi(t)} \end{aligned}$$

darstellen.

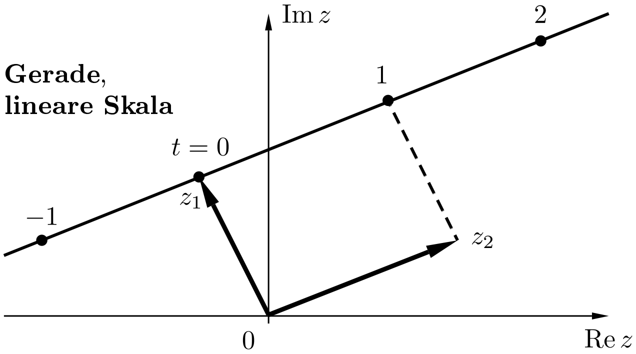
Ⓑ $z(t) = x(t) + j \cdot y_0$
hat als Ortskurve eine Parallele zu $\operatorname{Re} z$,

$z(t) = x_0 + j \cdot y(t)$
hat als Ortskurve eine Parallele zu $\operatorname{Im} z$,

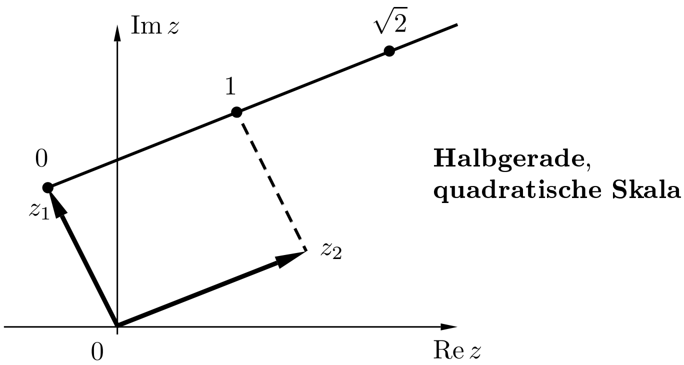
$z(t) = z_1 + f(t) \cdot z_2$ mit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $f : I \to R$ stetig
hat als Ortskurve eine Gerade oder Teil einer Geraden.

Speziell:

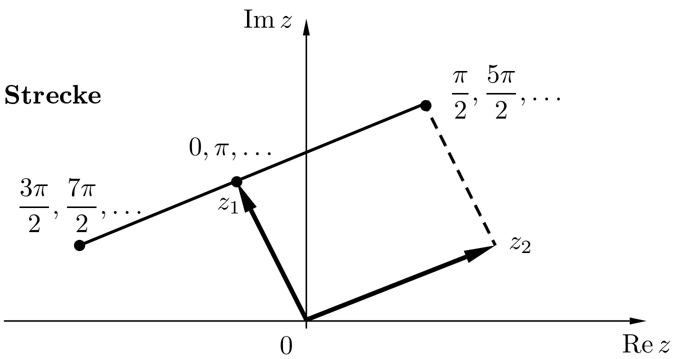
$z(t) = z_1 + t \cdot z_2 \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}$:



$z(t) = z_1 + t^2 \cdot z_2 \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}_0^+$:



$z(t) = z_1 + \sin t \cdot z_2$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$:

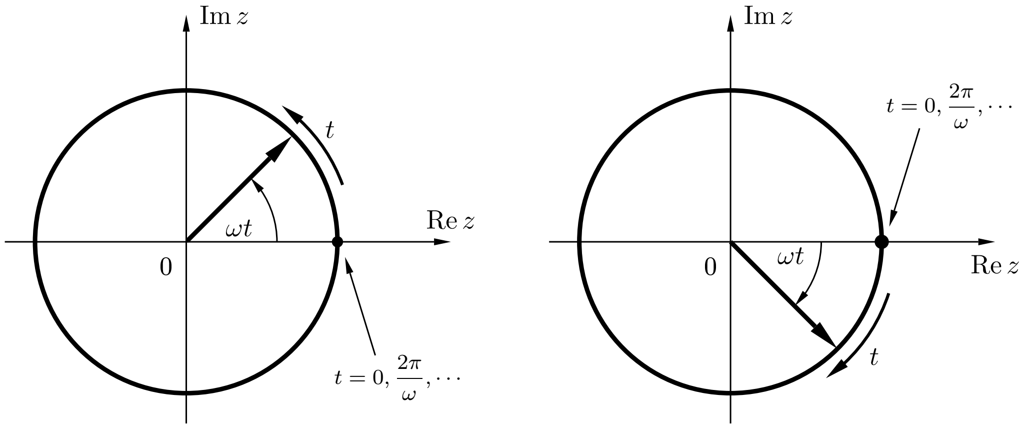


Lineare, harmonische Schwingung, wenn $t \to \omega \cdot t$ mit $\omega = \text{konst.}$

B $\quad z(t) = r \cdot \mathrm{e}^{\pm j\omega t}$

mit $r, \omega > 0, \quad t \in \mathbb{R}_0^+$

hat als Ortskurve **Kreis um** 0 **mit Radius** r, da $|z(t)| = r = \mathit{konst}$.



Physik:

- Bei **konstanter Winkelgeschwindigkeit** ω **und Zeitparameter** t beschreibt $z(t)$ eine **gleichförmige Kreisbewegung** gegen (**im**) Uhrzeigersinn mit der Umlaufdauer $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.
- Bei **konstanter Kreisfrequenz** ω **und Zeitparameter** t beschreibt $z(t)$ eine **zirkulare Schwingung** mit der Periodendauer $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

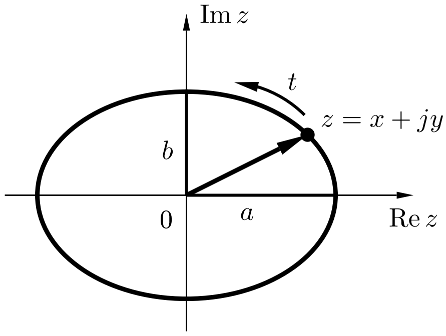
$$z(t + n \cdot T) = r \cdot \mathrm{e}^{\pm j\omega(t+nT)} = z(t), n \in \mathbb{N}_0 .$$

Ⓑ $z(t) = r_1 \cdot \mathrm{e}^{j\omega t} + r_2 \cdot \mathrm{e}^{-j\omega t}$
mit $r_1 > r_2 > 0, t \in \mathbb{R}_0^+$

$$\begin{aligned}
\text{Da } z(t) &= r_1 \cdot (\cos\omega t + j \cdot \sin\omega t) + r_2 \cdot (\cos\omega t - j \cdot \sin\omega t) \\
&= (r_1 + r_2) \cdot \cos\omega t + j \cdot (r_1 - r_2) \cdot \sin\omega t \\
&= x(t) + j \cdot y(t) \\
\Rightarrow x(t) &= a \cdot \cos\omega t \quad \text{mit } a := r_1 + r_2 \\
y(t) &= b \cdot \sin\omega t \quad \text{mit } b := r_1 - r_2
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{x(t)}{a} &= \cos\omega t \\
\frac{y(t)}{b} &= \sin\omega t
\end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{quadrieren} \\ \text{addieren}\end{array}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\text{: Ellipse}$$



Physik:
Überlagerung zweier zirkularer Schwingungen gleicher Kreisfrequenz ω

Inversion einer Ortskurve

heißt der Übergang $z(t) \to \dfrac{1}{z(t)}$.

Ⓑ komplexer Widerstand $Z(\omega) \to$
komplexer Leitwert $Y(\omega) = \dfrac{1}{Z(\omega)}$

Mit

$$\begin{aligned} z &= x + j \cdot y \neq 0 \\ \frac{1}{z} &= u + j \cdot v = \frac{1}{x + j \cdot y} = \frac{x - j \cdot y}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

ergibt sich

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

bzw.

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}; \quad y = -\frac{v^2}{u^2 + v^2} \qquad (*)$$

für die Inversion eines Punkts $(x, y) \to (u, v)$ oder umgekehrt in der Gaußschen Ebene.
Speziell in der E-Technik treten häufig auf:

Ⓑ **Inversion von Geraden und Kreisen**

Die Gleichung $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$ beschreibt für

$a = 0$, $d \neq 0$ eine **Gerade** **nicht** **durch** 0
$d = 0$ eine **Gerade** **durch** 0,

$a \neq 0 \wedge \ b^2 + c^2 - 4ad > 0$ einen **Kreis**
$d \neq 0$: **nicht** **durch** 0
$d = 0$: **durch** 0,

denn $x^2 + y^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a}y + \dfrac{d}{a} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(y + \frac{c}{2a}\right)^2 = \underbrace{\frac{b^2 + c^2 - 4ac}{4a^2}}_{\text{Radius}^2}$$

Inversion mit (*):

$$a\frac{u^2+v^2}{(u^2+v^2)^2} + b\frac{u}{u^2+v^2} + c\frac{-v}{u^2+v^2} + d = 0 \Big| \cdot (u^2 + v^2$$

$$d(u^2+v^2) + bu + (-c)v + a = 0$$

D.h. durch Inversion gehen über:

Gerade	durch 0	$\leftrightarrow$	**Gerade**	durch 0
Gerade	nicht durch 0	$\leftrightarrow$	**Kreis**	durch 0
Kreis	nicht durch 0	$\leftrightarrow$	**Kreis**	nicht durch 0