Gesa Amedick, Rolf Brigola

Brückenkurs Mathematik für Studienanfänger

Nano-Verlag

Dipl.-Ing Gesa Amedick und Prof. Dr. Rolf Brigola lehren Mathematik an der Georg-Simon-Ohm-Fachhochschule Nürnberg

5. durchgesehene Auflage

Satz: Schreibdienst Henning Heinze, Nürnberg

Inhaltsverzeichnis

Ein paar Worte zu Beginn

- *Feststellung*
  Moderne Wirtschaft und Technik sind wesentlich geprägt durch wachsenden Einsatz mathematischer Modelle und Methoden. Mathematik ist daher für ein Studium dieser Ausrichtung ein Grundlagenfach mit großem Gewicht und eine tragfähige Schlüsselqualifikation.
- *Erfahrung*
  Häufig besteht bei Studienanfängern eine große Diskrepanz zwischen mitgebrachtem Schulwissen in Mathematik und den Anforderungen, die in diesem Fach von Anfang an gestellt werden müssen. Diese Diskrepanz resultiert aus „vergessenem Wissen“, falscher Einschätzung, was wichtig oder unwichtig ist, fehlender Übung, mangelnder Arbeits- und Lerntechnik und vielen anderen Gründen mehr.
- *Angebot*
  Um Ihre Chancen für einen Studienerfolg von Anfang an zu erhöhen, bieten wir zum Einstieg diesen Brückenkurs an.
- *Vorbehalt*
  Dieser Brückenkurs kann sicherlich nicht den Mathematik-Stoff Ihrer 12 – 13 Schuljahre wiederholen oder ihn im Schnelldurchgang behandeln. Er ist zu verstehen als Erinnerung, als Auffrischung und *Aufforderung zur Arbeit* und als Test über einiges mathematisches Basiswissen, das Sie in der einen oder anderen Form schon einmal gelernt haben (sollten).
- *Ziel*
  Wir hoffen, Ihnen damit eine Orientierungshilfe zu bieten, die Ihnen zeigt, was von Ihnen erwartet wird, und es Ihnen ermöglicht, mathematische Schwächen, die Sie eventuell bei sich entdecken, rechtzeitig und aktiv zu bekämpfen.

Hierzu sind als Einstieg die angebotenen Übungsaufgaben und Kontrollfragen gedacht. Darüberhinaus empfehlen wir zur Vertiefung ein paar Schulbücher – es gibt eine Vielzahl sehr guter davon – und natürlich, wenn Sie noch die Schule besuchen, Gespräche mit Ihren Lehrern darüber, wie und wo Sie am besten Arbeit investieren sollten, um erfolgreich zu sein.

Gebrauchsanleitung

1. Der gesamte Brückenkurs umfasst ohne den Lösungsteil etwa 100 Seiten. Der geschätzte Zeitaufwand zum Durcharbeiten dürfte – abhängig von Ihren Vorkenntnissen – ca. 35 bis 60 Stunden betragen.

2. Wählen Sie sich pro Sitzung einen Arbeitsabschnitt aus, entweder in der gegebenen Reihenfolge des Inhaltsverzeichnisses oder nach eigenem Interesse und Dafürhalten.

3. Natürlich können Sie Ihr Wissen sofort an den Übungsaufgaben testen und danach entscheiden, welche Abschnitte des Lernstoffes Sie durcharbeiten.

4. Bearbeiten Sie den Stoff sorgfältig und nicht zu schnell. Ziehen Sie, wo nötig, auch Schulbücher zum jeweiligen Thema mit hinzu.

5. Lassen Sie sich nicht von der „komprimierten Form" erschrecken oder gar entmutigen. Wenn Sie sich vor allem die zugehörigen Beispiele und graphischen Darstellungen in Ruhe überlegen, wird sich zeigen, dass Sie nach einer Eingewöhnungsphase damit zurechtkommen. Dies sagt jedenfalls unsere Erfahrung mit vielen Hunderten von Studienanfängern mit ganz unterschiedlichen Anfangskenntnissen, die Mathematik schon gelernt und inzwischen erfolgreich ihr Diplom-Studium beendet haben.

6. Suchen Sie sich einen Ansprechpartner: Bekannte, die schon studiert haben, Freunde, die auch ein Studium beginnen wollen, evtl. ihre Mathematiklehrer usw. Teamgeist und Teamarbeit sind wichtig, am besten sofort.

7. Die Übungen sind wesentlicher Bestandteil des Kurses. Bearbeiten Sie bitte die Aufgaben auf jeden Fall mit Stift und Papier ohne die zugehörigen Lösungen sofort heranzuziehen. Nur so haben Sie ja einen Lernerfolg und erreichen das erwünschte Wissen.

Wir wünschen viel Erfolg bei der Arbeit

Perspektiven

Welche *Inhalte* erwarten Sie in den Mathematikvorlesungen *im Grundstudium* der beiden ersten Semester?

Generell ist dies in den Studienordnungen der einzelnen Fachrichtungen geregelt. Wir geben nur als Beispiel in Stichworten einen möglichen Vorlesungsaufbau für die Mathematik der ersten beiden Semester in einer technischen Studienrichtung, etwa Elektrotechnik, an der Fachhochschule.

1. Semester

- *Vollständige Induktion, Summen, Binomialsatz*
- *Folgen und unendliche Reihen, Grenzwerte*
- *Stetige Funktionen und ihre Eigenschaften*
- *Elementare Funktionen*, z.B.

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad e^{x+y} = e^x e^y, \quad \ln(x), \cos(x), \arccos(x) \quad \text{usw.}$$

  und ihre Eigenschaften

- *Komplexe Zahlen und komplexe Funktionen*, z.B.

$$\begin{aligned} e^{jx} &= \cos(x) + j\sin(x) \quad \text{mit} \quad j^2 = -1, \\ \ln(x+jy) &= \ln(|x+jy|) + j\arg(x+jy) + 2\pi kj \\ &\quad \text{mit} \quad x+jy \notin \mathbf{R}_0^-, k \in \mathbf{Z}\,. \end{aligned}$$

- *Polynome, Fundamentalsatz der Algebra*

- *Differentialrechnung für Funktionen einer Variablen*

  Lineare Näherung, Differentiationsregeln, Mittelwertsatz und Taylorformel

  $$f(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \text{Fehler}(N, x_0, x)$$

  (f geeignet differenzierbar)
  Anwendungsbeispiele

- *Integralrechnung für Funktionen einer Variablen*

  Integrale und ihre Eigenschaften, Stammfunktionen, Integrationsmethoden, Mittelwerte, numerische Integration, Anwendungsbeispiele.

Zeitbudget: In ca. 13 Wochen je 6×45 Minuten Vorlesung und 2×45 Minuten Übungen *insgesamt also etwa 58 bis 60 Stunden Vorlesung* und *20 Stunden Übungen.*

2. Semester

- *Abschnitte aus der linearen Algebra*

  Vektoren, Vektorräume, Basis, Dimension, Lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen, Matrizen, Determinanten, Lineare Gleichungssysteme, Eigenwertprobleme, Approximation in Vektorräumen.

- *Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Variablen*

  Partielle Ableitungen, totale Differenzierbarkeit, Differentiationsregeln, Mittelwertsatz und Taylorformel, lokale Extrema ohne und mit Nebenbedingungen, Fehlerrechnung und andere Anwendungsbeispiele

- *Integralrechnung für Funktionen mehrerer Variablen*

  Integrale und ihre Eigenschaften, Integration bzgl. kartesischer, Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten, Anwendungsbeispiele.

- *Ausschnitte aus dem Gebiet Gewöhnlicher Differentialgleichungen*

  Grundlegendes über gewöhnliche Differentialgleichungen, Ausschnitte der Lösungstheorie und Lösungsmethoden, speziell für lineare Differentialgleichungen, Laplace-Transformation, Anwendungsbeispiele in der Übertragungstechnik.

Zeitbudget: Wie im 1. Semester

Für andere Fachrichtungen, etwa Informatik, liegen die Gewichte etwas anders – bei der Informatik sind z.B. Ausschnitte aus der Algebra und der diskreten Mathematik stärker vertreten – aber diese Übersicht soll Ihnen ja auch nur einen Eindruck von Inhalten, Umfang und (leider knappem) Zeitbudget vermitteln.

Bei engagiertem Einstieg (jetzt!) und später adäquater Zusammenarbeit mit ihren Professoren können Sie jedenfalls diese Studienziele wie viele andere vor Ihnen mit Erfolg erreichen.

Referenzen

Für die Unterstützung bei der Erstellung des Brückenkurses und Beiträge zu den Inhalten danken wir unseren Kollegen S. Bolz, H. Leinfelder, H. Nohl (FH Nürnberg), M. Gruber (FH München) und P. Singer (FH Ingolstadt), sowie H. Heinze für den Buchsatz mit TEX.

1 Erste Schritte in die mathematische Logik

1.1 Aussagen

In der Mathematik vereinbart man seit Aristoteles (384 − 322 v.u.Z.)

Eine **Aussage** *A ist ein sprachliches Gebilde,*
dem entweder der Wahrheitswert ‚wahr', symbolisch $W(A) = w$
oder der Wahrheitswert ‚falsch', symbolisch $W(A) = f$
zukommt.

Man nennnt dies: **Prinzip der logischen Zweiwertigkeit**

Beispiele	B1)	Der Wal ist ein Fisch	$W(B1) = f$
	B2)	$2 + 4 = 6$	$W(B2) = w$
	B3)	$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl	$W(B3) = w$

1.2 Aussageformen

Nicht jedes sprachliche Gebilde ist eine Aussage.

Beispiele	B1)	Herzlichen Glückwunsch!	Ausruf
	B2)	Wie spät ist es?	Frage
	B3)	$x + 3 = 8$	
	B4)	$xy = 0$	

Die obigen Beispiele B3) und B4) sind trotzdem in Mathematik und Technik von Interesse, da sie sog. **Variable** (Platzhalter) enthalten.

Diese Variablen sind immer auf einen gewissen Bereich von Objekten bezogen, z.B. einen Zahlenbereich, in dem eine mathematische oder physikalische Größe ihren Wert haben kann.

Solche Gebilde mit Variablen heißen **Aussageformen**; sie haben keinen Wahrheitswert. Erst durch Einsetzen von **Argumenten** für die Variablen entstehen Aussagen, die dann entweder wahr oder falsch sind.

Beispiel B5) $x + 3 = 8$ geht durch Einsetzen einer Zahl für x in eine Aussage über, z.B. für $x = 7$ in die (falsche) Aussage $7 + 3 = 8$.

1.3 Logische Verbindungen von Aussagen und Aussageformen

Viele Aussagen/Aussageformen sind zusammengesetzt aus mehreren Teilen, die selbst wieder Aussagen/Aussageformen sind.

Beispiele B1) $5 + 3 = 8$ **und** $1 + 3 = 4$

B2) x ist natürliche Zahl **oder** $x = 0$

B3) **Wenn** x eine gerade Zahl ist **und** $x > 2$ ist, **dann** ist x **nicht** Primzahl

Als verbindende Worte, sog. **logische Verknüpfungen**, zwischen diesen Teilen treten auf:

	symbolisch
nicht	$\neg$
und	$\wedge$
oder	$\vee$
wenn ..., **dann**	$\Longrightarrow$
genau dann ..., **wenn**	$\Longleftrightarrow$

Für Aussagen oder Aussageformen A und B heißen also

$\neg A$	**nicht** A
$A \wedge B$	A **und** B
$A \vee B$	A **oder** B
$A \Longrightarrow B$	**Wenn** A, **dann** B Aus A folgt B A ist hinreichend für B B ist notwendig für A
$A \Longleftrightarrow B$	A **ist äquivalent zu** B genau dann A, wenn B B ist hinreichend und notwendig für A A ist hinreichend und notwendig für B

In der Aussagenlogik werden diese Verknüpfungen so festgelegt, dass sich der Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage eindeutig aus den Wahrheitswerten der beteiligten Teilaussagen ergibt.

Durch eine Belegung der Teilaussagen mit Wahrheitswerten ergibt sich dann der Wahrheitswert, d.h. der logische Wert der zusammengesetzten Aussage.

Die Regeln für dieses sog. **logische Schließen** kann man kurz in einer **Wahrheitstafel** zusammenfassen, die vor uns schon viele Jahrhunderte seit Aristoteles benutzt wurde:

Wahrheitstafel

Vorbelegungen		dann sind die Wahrheitswerte					
A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Longrightarrow B$	$A \Longleftrightarrow B$
w	w	f	f	w	w	w	w
w	f	f	w	f	w	f	f
f	w	w	f	f	w	w	f
f	f	w	w	f	f	w	w

Besonderheiten gegenüber der Umgangssprache

1) Die Oder-Verknüpfung ist kein ausschließendes ‚Entweder-oder', sondern $A \vee B$ ist wahr, wenn nur eine der beiden Teilaussagen wahr ist oder auch beide zusammen wahr sind.
2) $A \Longrightarrow B$ ist immer wahr, wenn A falsch ist!
   Etwa ist $(5 + 3 = 6) \Longrightarrow (2 + 2 = 3)$ eine logisch wahre Aussage.
   Grob gesprochen: Aus falschen Voraussetzungen kann man alles folgern.
3) Vermeiden Sie voreilige, laienhafte Umkehrschlüsse!
   $A \Longrightarrow B$ heißt nicht auch $B \Longrightarrow A$.
   Etwa ist für eine reelle Zahl x die Aussage: $[x = \sqrt{2} \Longrightarrow x > 0]$ richtig, dagegen ist die Umkehrung $[x > 0 \Longrightarrow x = \sqrt{2}]$ falsch.

1.4 Einige logische Sätze

Wir zeigen als Übung mit Hilfe der Wahrheitstafel folgenden ersten **logischen Satz**:

Für je zwei Aussagen A und B gilt:

$$(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg A \vee B)$$

Beweis

Vorbelegungen		dann sind die Wahrheitswerte		
A	B	$(A \Longrightarrow B)$	$\Longleftrightarrow$	$(\neg A \vee B)$
w	w	w	w	w
w	f	f	w	f
f	w	w	w	w
f	f	w	w	w

Für alle möglichen Belegungen von A und B mit Wahrheitswerten ist also die behauptete Äquivalenz richtig:
Stets sind beide Seiten gleichzeitig wahr oder beide gleichzeitig falsch, d.h. von gleichem logischen Wert, also gleichwertig, wobei es nicht auf den Inhalt der Aussagen A und B ankommt.

Weitere logische Sätze:
Doppelte Verneinung und Sätze von DeMorgan.

Für je zwei Aussagen A und B gelten:

a) $\neg(\neg A) \Longleftrightarrow A$

b) $\neg(A \wedge B) \Longleftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

c) $\neg(A \vee B) \Longleftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

Sie können diese ersten logischen Tatsachen leicht selbst mit Hilfe der Wahrheitstafel nachprüfen, wie wir dies oben getan hatten. In diesem Satz stecken die **Regeln für Verneinungen**. Völlig unabhängig vom Inhalt der beteiligten Teilaussagen A und B kann man ganz schematisch vorgehen:

Verneinung von $A \wedge B$ bzw. $A \vee B$ heißt: Verneinung der beteiligten Teilaussagen A, B, und $\wedge$ mit $\vee$ vertauschen.

Beispiele B1) $\neg[(A \wedge B) \vee C] \iff [\neg(A \wedge B) \wedge (\neg C)] \iff [((\neg A) \vee (\neg B)) \wedge (\neg C)]$

B2) $[\neg(A \Longrightarrow B)] \iff [\neg(\neg A \vee B)] \iff [A \wedge \neg B]$

Logische Distributivgesetze und logisches Weiterschließen

Für Aussagen A, B und C gelten:

a) $A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

b) $A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

c) $[(A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow C)] \Longrightarrow [A \Longrightarrow C]$

Sprechweise bei c): Wenn B aus A folgt und C aus B folgt, dann folgt auch C aus A.

1.5 Anwendungsbeispiele

Neben ständigen Anwendungen logischer Sprech- und Schlußweisen in den folgenden Abschnitten mit vornehmlich mathematischer Blickrichtung betrachten wir drei kleine Beispiele mit programmiertechnischem Hintergrund.

Informationsverarbeitung beim Programmieren

In Programmiersprachen gibt es die logischen Operationen ($\wedge$, $\vee$, $\neg$) als **Boolesche Operationen** (`AND`, `OR`, `NOT`). Zusammengesetzte Aussageformen entsprechen **Booleschen Ausdrücken**, zusammengesetzt aus **Booleschen Variablen**, verknüpft durch Boolesche Operationen. Durch Einsetzen von Argumenten in Aussageformen entstehen Aussagen mit Wahrheitswerten (wahr oder falsch). Entsprechend können Boolesche Ausdrücke 2 Werte annehmen, 0 für falsch, 1 für wahr.

Beispiel 1 Der Satz von DeMorgan: $[\neg(A \wedge B)] \iff [\neg A \vee \neg B]$ sagt z.B., daß die Werte der in Pascal wie folgt programmierten Booleschen Variablen WERT1 und WERT2 übereinstimmen:

```
VAR A, B, WERT1, WERT2: BOOLEAN ; ... ...
WERT1:= NOT (A AND B) ;
WERT2:= (NOT A) OR (NOT B) ;
```

Unabhängig von den Wahrheitswerten der Booleschen „Eingangsgrößen“ A und B haben nach DeMorgan `WERT1` und `WERT2` gleichen Wert, obwohl unterschiedlich programmiert. Dieser Wert könnte etwa programmseitig abgefragt und zur Steuerung in verschiedene Programmzweige verwendet werden.

Beispiel 2 Im Rechner ist jede Information abgespeichert in Form sog. Dualzahlen, d.h. Zahlen, die an jeder Stelle eine 0 oder eine 1 besitzen.

Beispiel:	Dualzahl	1	0	0	1	0	0	0	0
	Stelle	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

10010000 dual entspricht $1 * 2^7 + 1 * 2^4$ dezimal $= 144$ dezimal.

Eine einzelne Stelle einer Dualzahl ist also die **kleinste Informationseinheit** in einem Rechner. Man nennt sie ein **Bit**.

Eine 8-stellige Dualzahl kann daher 8 einzelne Informationen speichern, z.B. Schalterstellungen von 8 Schaltern eines Netzes mittels:
0 für „Schalter aus“,
1 für „Schalter ein“.

10010000 hieße: Schalter Nr. 4 und 7 „ein“, alle anderen „aus“.

Zustandsänderungen an den Schaltern müßten als **neue Information** abgespeichert werden. Etwa gehe Schalter Nr. 2 von „aus“ auf „ein“. Die Speicherung dieser neuen Information geschieht programmseitig üblicherweise durch Anwendung logischer Operationen:

MASKE enthalte die Dualzahl 00000100, („ein“ für Schalter Nr. 2, „aus“ sonst).

AL enthalte die Dualzahl 10010000, also den alten Zustand der 8 Schalter.

AL	1	0	0	1	0	0	0	0
MASKE	0	0	0	0	0	1	0	0
Stelle	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

Der Assembler-Befehl **OR AL,MASKE** bewirkt: Bitweise Oder-Verknüpfung mit Ergebnis in AL:

AL	1	0	0	1	0	1	0	0
Stelle	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

Das Ergebnis der bitweisen logischen Operationen gemäß Wahrheitstafel bei den Oder-Verknüpfungen in AL enthält jetzt also den neuen Schalterzustand.

Beispiel 3 **Boolesche Funktionen in der Schaltalgebra:** In der Informatik werden Schaltnetze durch Boolesche Funktionen beschrieben.

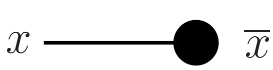
1. **Boolesche Variable und Funktionen:** Boolesche Variable $x \in \{0, 1\}$

Bedeutung:

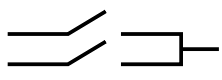
Wert	Logik	Mengen	Schaltungen
1	wahr	Element	Strom
0	falsch	kein Element	kein Strom

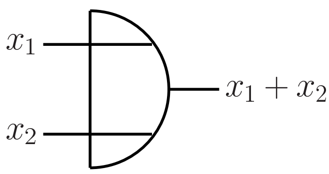
2. **Verknüpfung Boolescher Variabler** (C.Shannon 1938):

(a) Inversion ($0 \to 1$, $1 \to 0$)



(b) Oder-Gatter (Parallelschaltung)

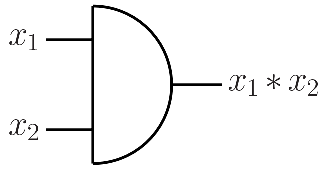




+	0	1
0	0	1
1	1	1

Man vergleiche mit der Oder-Verknüpfung von Aussagen in der Wahrheitstafel.

(c) Und-Gatter (Serienschaltung)

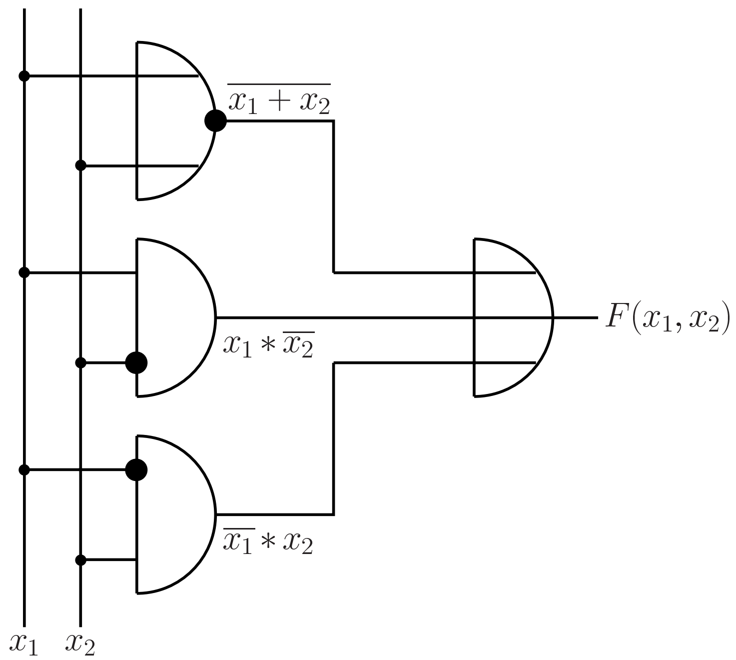


*	0	1
0	0	0
1	0	1

Man vergleiche mit der Und-Verknüpfung von Aussagen in der Wahrheitstafel.

3. **Schaltnetze und Boolesche Funktionen:** Das folgende Schaltnetz wird beschrieben durch die Boolesche Funktion:

$$F(x_1, x_2) = \overline{x_1 + x_2} + x_1 * \overline{x_2} + \overline{x_1} * x_2$$



Im Studium werden Sie folgenden Satz über Boolesche Funktionen kennenlernen:
Jede Boolesche Funktion F: $\{0,1\}^n \to \{0,1\} (n \in \mathbf{N})$ läßt sich in eindeutiger Weise in disjunktiver Normalform (DNF) darstellen, d.h. als Summe von i ($1 \leq i \leq 2^n$) Summanden schreiben, so dass erstens jeder Summand ein Produkt ist, in dem jede Variable in Eigen- oder Invertierter Form genau einmal auftritt, und zweitens keine zwei Summanden identisch sind.

Damit lassen sich gegebene Boolesche Funktionen und zugehörige Schaltnetze oft erheblich vereinfachen.

Vereinfachung von F im Beispiel oben in disjunktive Normalform:

$$F(x_1, x_2) = \overline{x_1 + x_2} + x_1 * \overline{x_2} + \overline{x_1} * x_2$$
$$F(x_1, x_2) = \overline{x_1} * \overline{x_2} + x_1 * \overline{x_2} + \overline{x_1} * x_2 \quad \text{(nach DeMorgan)}$$

Dies ist die *disjunktive Normalform* von F. Man kann weiter umformen:

$$F(x_1, x_2) = \overline{x_1} * \overline{x_2} + x_1 * \overline{x_2} + \overline{x_1} * x_2 + \overline{x_1} * \overline{x_2}$$

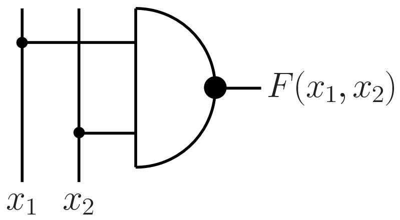
(Gleiches Addieren schadet nicht. Vgl. $A \vee A \Leftrightarrow A$)

$$F(x_1, x_2) = (\overline{x_1} + x_1) * \overline{x_2} + \overline{x_1} * (x_2 + \overline{x_2}) \quad \text{(Distributivgesetz)}$$
$$F(x_1, x_2) = \overline{x_2} + \overline{x_1}$$

Dies ist eine weitere Normalform von F, die sogenannte *konjunktive Normalform*. Sie ist nach DeMorgan offenbar auch äquivalent zur Darstellung:

$$F(x_1, x_2) = \overline{x_1 * x_2}$$

und F **läßt sich damit durch das folgendes vereinfachte Schaltnetz repräsentieren:**



Im Studium werden Sie u.a. auch eine graphische Methode (Karnaugh-Diagramme) kennenlernen, um Boolesche Funktionen/Schaltnetze zu vereinfachen. Es empfiehlt sich aber auch hierfür *Computeralgebra* einzusetzen.

1.6 Quantifizierende Redeteile

In mathematischen Aussagen, und nicht nur dort, treffen wir häufig auf Redeteile wie:

„Für alle ...“ bzw. **„Für jedes ...“** und **„Es gibt. . . .“** bzw. **„Es existiert ...“** .

Beispiel 1 „**Es gibt (mindestens)** eine Primzahl n, so dass $5 \leq n < 9$“

Abkürzend schreiben wir symbolisch:

$$\bigvee_{n \in \mathbf{N}} (5 \leq n < 9) \wedge (n \text{ Primzahl})$$

Man spricht von Quantifizierung der Variablen und nennt das Abkürzungszeichen

$$\bigvee$$

für den Redeteil „Es existiert/gibt mindestens ein . . . “ den **Existenzquantor**. Unter diesem Zeichen wird notiert, auf welchen Bereich die betroffene Variable bezogen ist.

Beispiel 2 „**Für alle** reellen Funktionen $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ und **für alle** $x \in \mathbf{R}$ gilt: Wenn f in x differenzierbar ist, dann ist f in x stetig.“
oder
„**Für jede** reelle Funktion $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ und **für jede** reelle Zahl x gilt: Wenn f in x differenzierbar ist, dann ist f in x stetig.“

Abkürzend schreiben wir symbolisch:

$$\bigwedge_{f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}} \ \bigwedge_{x\in\mathbf{R}} (f \text{ differenzierbar in } x) \Longrightarrow (f \text{ stetig in } x)$$

Analog heißen die hier benützten Abkürzungszeichen

$$\bigwedge$$

für die Redeteile „... Für alle ...“ **Allquantoren**. Der erste Allquantor im Beispiel gibt den Bereich für die Variable f an, nämlich alle reellen Funktionen, der zweite den Bereich für die Variable x, nämlich alle reellen Zahlen.

Wieder entsteht erst durch die Quantifizierung der Variablen eine mathematische Aussage, hier eine wahre Aussage über reelle Funktionen und einen Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit solcher Funktionen.

Beispiel 3

$$\bigwedge_{x\in\mathbf{R}} \ \bigvee_{p\in\mathbf{Z},\ q\in\mathbf{N}} x = \frac{p}{q}$$

Sprechweise: Zu jeder reellen Zahl x gibt es eine ganze Zahl p und (gibt es) eine natürliche Zahl q, so dass $x = p/q$.

Dies ist eine falsche Aussage über reelle Zahlen, da sie für $x = \sqrt{2}$ nicht zutrifft.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit haben wir zur Quantifizierung der beiden Variablen p und q nur einmal den Existenzquantor geschrieben und die Variablenbereiche für p und q darunter angegeben.

1.7 Verneinung quantifizierter Aussagen

Beispiel 1 $\mathbf{A}$: $\bigwedge_{x\in\mathbf{R}} x^2 > 0$ — Für alle reellen Zahlen x gilt: $x^2 > 0$

$$\left.\begin{array}{l} \neg\mathbf{A}\colon \bigvee_{x\in\mathbf{R}} \neg(x^2 > 0) \\ \bigvee_{x\in\mathbf{R}} x^2 \le 0\,; \end{array}\right\} \text{Es gibt eine reelle Zahl } x \text{, so dass } x^2 \le 0$$

Beispiel 2 $\mathbf{B}$: $\bigvee_{n\in\mathbf{N}} 5 = 2^n$ — Es gibt eine natürliche Zahl n, so dass $5 = 2^n$

$$\left.\begin{array}{l} \neg\mathbf{B}\colon \bigwedge_{n\in\mathbf{N}} \neg(5 = 2^n) \\ \bigwedge_{n\in\mathbf{N}} 5 \ne 2^n\,; \end{array}\right\} \text{Für jede natürliche Zahl } n \text{ gilt: } 5 \ne 2^n$$

Verneinungen lassen sich übrigens mit diesen formalen Schreibweisen sehr leicht und immer richtig durchführen nach folgender Regel, die wir optisch schon bei dem Satz von DeMorgan gesehen haben:

Verneinung der quantifizierten Aussage $\Leftrightarrow$ Verneinung der beteiligten Aussageform und Vertauschung von Existenz- und Allquantoren.

Formal für eine Aussageform $A(x)$ mit einer Variablen x, x bezogen auf eine Menge M:

$$\neg[\bigwedge_{x\in M} A(x)] \Longleftrightarrow [\bigvee_{x\in M} \neg A(x)]$$

und

$$\neg[\bigvee_{x\in M} A(x)] \Longleftrightarrow [\bigwedge_{x\in M} \neg A(x)]$$

Das funktioniert ganz automatisch und liefert, danach gelesen, sicher die richtige Verneinung.

Beispiel 3

$$\mathbf{C}\colon \bigwedge_{x\in\mathbf{R}} \quad \bigvee_{p\in\mathbf{Z},\ q\in\mathbf{N}} x = \frac{p}{q}$$

$$\neg\mathbf{C}\colon \bigvee_{x\in\mathbf{R}} \quad \bigwedge_{p\in\mathbf{Z},\ q\in\mathbf{N}} x \neq \frac{p}{q}$$

Sie sehen, wie man leicht durch Verneinung der falschen Aussage C hier die richtige Aussage $\neg C$ erhält
(z.B. $x = \sqrt{2}$ ist so ein Exemplar wie in $\neg C$ behauptet).

1.8 Beweisen, mathematisches Schließen

Ohne auf die „Theorie des Beweisens“ einzugehen – man muss hierzu auf die umfassende Literatur zur Logik verweisen –, beschränken wir uns auf die exemplarische Demonstration häufig angewandter Argumentationsweisen anhand einiger Beispiele:

- **Beweis von Existenz-Aussagen**
- **Beweis von All-Aussagen**
- **Widerspruchsbeweise**

1.8.1 Beweis von Existenz-Aussagen

Behauptet sei eine Aussage der Form:

$$\bigvee_{x\in M} A(x),$$

wobei $A(x)$ eine Aussageform und M eine Bezugsmenge für die Variable x darstellen.

Dann ist zum Beweis entweder ein spezielles Exemplar $x_0 \in M$ anzugeben, oder aufgrund schon bekannten Wissens nachzuweisen, dass es ein solches Exemplar geben muss, so dass die Aussage $A(x_0)$ richtig ist, wenn man x_0 als Argument in die Aussageform einsetzt.

Beispiel 1 $$\bigvee_{x \in \mathbf{R}} x^2 \leq 0$$

Beweis Die Aussage ist richtig für $x_0 = 0$

Beispiel 2 Gegeben ist eine beliebige stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$

Behauptung: $$\bigvee_{x_0 \in [a,b]} f(x_0) = \frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a}$$

In Worten: Es gibt mindestens eine Stelle x_0 im Intervall $[a,b]$, so dass die Funktion f dort den Wert

$$f(x_0) = \frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a}$$

hat.

Wir greifen hier etwas vor und setzen voraus, dass Sie schon einige wesentliche Tatsachen über stetige Funktionen kennen und auch das Integral nicht unbekannt ist.

Beweis Aus $\min\{f(x)|a \leq x \leq b\} \leq f(x) \leq \max\{f(x)|a \leq x \leq b\}$ für $a \leq x \leq b$ folgt durch Integration

$$\min\{f(x)|a \leq x \leq b\} \int_a^b dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \max\{f(x)|a \leq x \leq b\} \int_a^b dx$$

und nach Division durch $(b-a)$:

$$\min\{f(x)|a \leq x \leq b\} \leq \frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a} \leq \max\{f(x)|a \leq x \leq b\}.$$

Bezeichnen wir die Zahl $\left(\int\limits_a^b f(x)dx\right) \Big/ \Big(b-a\Big)$ mit M, so heißt dies, M liegt zwischen dem *Minimal*- und dem *Maximalwert* von f. Da f stetig ist und nach dem berühmten *Zwischenwertsatz* für stetige Funktionen – den Sie sicher schon mal in der Schule behandelt haben – jede Zahl zwischen Minimal- und Maximalwert ebenfalls zum Wertebereich solcher Funktionen gehört, *muss* es also eine Stelle x_0 in $[a,b]$ geben, an der f diesen Wert M hat:

$$\bigvee_{x_0 \in [a,b]} f(x_0) = M = \frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a}.$$

Bemerkung 1. Das Besondere dieser Aussage: Sie gilt für beliebige stetige Funktionen f, denn wir haben nichts Spezifisches über f außer Stetigkeit vorausgesetzt (vgl. nächster Abschnitt).

2. Die Zahl M heißt *Mittelwert* von f und der bewiesene Sachverhalt zeigt eine der wichtigsten Eigenschaften des Integrals: Es dient zur *Berechnung von Mittelwerten*. Nur bei Längeneinheiten auf beiden Achsen bedeutet das Integral einen Flächeninhalt. In den meisten technischen und wirtschaftlichen Anwendungen spielen Längeneinheiten aber eine eher untergeordnete Rolle. Desto wichtiger ist dort die Bedeutung von Mittelwerten zur Einführung einer Vielzahl von „Maßzahlen“ und das heißt die *Bedeutung des Integrals zur Mittelwertberechnung*.

Beispiele Mittlere Geschwindigkeit bei einer Bewegung, Schwerpunkt einer Massenverteilung, Trägheitsmomente, Arbeit und Leistung u.v.a.m.

1.8.2 Beweis von All-Aussagen

Behauptet sei eine Aussage der Form:

$$\bigwedge_{x \in M} A(x),$$

wobei $A(x)$ eine Aussageform, M eine Bezugsmenge für die Variable x darstellen.

Dann muss zum Beweis gezeigt werden, dass die Aussage $A(x_0)$ richtig ist für jedes beliebige Argument x_0 aus M.

Beispiel 3 Behauptet sei:

$$\bigwedge_{x \in \mathbf{R}} x < \frac{2x+1}{2} < x+1.$$

Zum Beweis geht man folgendermaßen vor:

Man denke sich ein völlig beliebig gewähltes $x_0 \in \mathbf{R}$. Man drückt dies dadurch aus, dass man sagt:

„Sei $x_0 \in \mathbf{R}$ beliebig gewählt“. Dieses x_0 steht dann in der Folge einerseits für eine konkrete reelle Zahl, für welche die behauptete Aussage nachzurechnen ist, andererseits dürfen nur solche Eigenschaften und Rechenregeln benutzt werden, die für jedes Element der Bezugsmenge $\mathbf{R}$ gelten, denn jedes Element könnte bei der Wahl von x_0 ja getroffen werden. Ist dann die Behauptung für dieses eine x_0 nachgeprüft, so argumentiert man, dass sie schon allgemein für jedes mögliche Exemplar der Bezugsmenge, hier für alle $x \in \mathbf{R}$, bewiesen sei, weil man jedes solche als x_0 ja hätte benutzen können. Sei also $x_0 \in \mathbf{R}$ beliebig gewählt. Dann gilt

$$2x_0 < 2x_0 + 1 < 2x_0 + 2\,,$$

also nach Division durch 2 sicher auch

$$x_0 < \frac{2x_0+1}{2} < x_0 + 1\,.$$

Damit ist die Behauptung nach obiger Argumentation bewiesen.

Zur Übung dieser Argumentationsweise, die sich bei derartigen „All-Aussagen“ stets wiederfinden wird, noch ein Beispiel:

Beispiel 4 Behauptet sei:

$$\bigwedge_{x\in\mathbf{R},x\geq 0}\ \bigvee_{y\in\mathbf{R}}\ y^2 \leq x.$$

Beweis Sei $x_0 \in \mathbf{R}$ beliebig gewählt, so dass $x_0 \geq 0$. Damit hat man ein Exemplar der Bezugsmenge für die Variable x fixiert. Nun ist zu diesem fixierten x_0 ein geeignetes Element $y_0 \in \mathbf{R}$ anzugeben, so dass $y_0^2 \leq x_0$.

Wir verwenden beispielsweise $y_0 := \sqrt{x_0}/2$.

Das ist möglich, weil $x_0 \geq 0$ gewählt war! Hieraus ergibt sich aber sofort:

$$y_0^2 = \frac{x_0}{4} \leq x_0\,.$$

Damit ist wieder nach obiger Argumentation die „All-Aussage“ bewiesen, weil bei der Wahl unseres Exemplares x_0 ja jede nicht-negative reelle Zahl hätte getroffen werden können.

Beispiel 5

$$\bigwedge_{a,b\in\mathbf{R},a<b}\ \bigwedge_{f\colon [a,b]\to\mathbf{R},f\,stetig}\ \bigvee_{x_0\in[a,b]}\ f(x_0) = \frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a}$$

Beweis (Vergleiche Beispiel 2 im Abschn. „Beweis von Existenz-Aussagen“) $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ können dort **beliebig** gewählt werden und $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ kann eine **beliebige** stetige Funktion sein, wir können dann exakt argumentieren wie in Beispiel 2 des vorherigen Abschnitts.

1.8.3 Widerspruchsbeweise

Eine weitere häufig benutzte Argumentationsart beim Beweis von Aussagen ist der **Beweis durch Widerspruch**. Etwa soll für zwei Aussagen A und B gezeigt werden: $A \Longrightarrow B$. Wir demonstrieren das Vorgehen an einem Beispiel.

Beispiel 6 *Behauptet sei*: Für alle $x, y \in \mathbf{R}$ gilt:

$$(xy = 0) \Longrightarrow (x = 0 \vee y = 0)\,.$$

Üblicher Beginn zum Beweis dieser „All-Aussage“: Seien $x_0, y_0 \in \mathbf{R}$ beliebig gewählt.

Einsetzen dieser Argumente in die Aussageformen führt also zur Aussage:

$$(x_0y_0 = 0) \Longrightarrow (x_0 = 0 \vee y_0 = 0).$$

was von der Form A $\Longrightarrow$ B ist.

Mit der Wahrheitstafel sehen Sie sofort

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} \Longrightarrow \mathbf{B}) \iff (\neg A \vee B) \iff (B \vee \neg A) \iff (\neg(\neg B) \vee \neg A)\\ \iff (\neg\mathbf{B} \Longrightarrow \neg\mathbf{A})\end{aligned}$$

Statt A als richtig vorauszusetzen und damit B herzuleiten, setzt man $\neg B$ als richtig voraus und folgert hieraus $\neg A$. Nach obiger logischer Äquivalenzkette hat man dann mit $\neg B \Longrightarrow \neg A$ auch $A \Longrightarrow B$ bewiesen.

In unserem Beispiel sieht das folgendermaßen aus:

– $\neg B: \; x_0 \neq 0 \wedge y_0 \neq 0$ sei vorausgesetzt.

– Dann muß auch $x_0 y_0 \neq 0$ sein.

– Das ist aber gerade schon $\neg A$. Also ist $\neg B \Longrightarrow \neg A$ richtig, mithin auch $A \Longrightarrow B$, was zu beweisen war.

Die zuletzt benutzte Rechenregel ist, wie wir sehen, sogar äquivalent zur Anfangsbehauptung.

Beispiel 7 Ein anderes typisches Beispiel für einen Widerspruchsbeweis ist der Nachweis, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist (Stoff der 9. Klasse an Gymnasien).

Behauptung: $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$

($\mathbf{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen)

Beweis Wir setzen als Aussage A: $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$.
Als Aussage B bezeichnen wir: $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ mit einer ganzen Zahl p, einer natürlichen Zahl q und p, q teilerfremd.

Nun:

1. Es gilt $A \Rightarrow B$. Denn wenn $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$ ist, dann kann man in endlich vielen Schritten solange kürzen, bis $\sqrt{2}$ durch einen teilerfremden Bruch dargestellt wird.

2. Wir nehmen einmal an, $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ mit einer ganzen Zahl p und einer natürlichen Zahl q. Nun gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2 \text{ durch 2 teilbar} \\ \Rightarrow p = 2\bar{p} \text{ mit einer ganzen Zahl } \bar{p}. \end{aligned}$$

   Dann wäre

$$\begin{aligned} 2 = \frac{4\bar{p}^2}{q^2} \Rightarrow q^2 = 2\bar{p}^2 \Rightarrow q^2 \quad \text{durch 2 teilbar} \\ \Rightarrow q \quad \text{durch 2 teilbar.} \end{aligned}$$

   Also wären p und q im **Widerspruch** zu B dann doch nicht teilerfremd, d.h. es gilt $\neg B$. Insgesamt haben wir also gezeigt:

$$(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B)\,.$$

   Das ist aber *logisch äquivalent* zu $\neg A$, also $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$, was zu beweisen war.

Solche Argumentationen werden im Studium ständiges Handwerkszeug sein, und wir hoffen, dass mit dieser Hilfestellung über logische Grundlagen Ihr mathematischer Höhenflug starten kann.

1.9 Kurztest zum Abschnitt Logik

1. Unter welchen Voraussetzungen an A und B sind *richtig*?

$$A \wedge B, \quad A \vee B, \quad A \Rightarrow B, \quad A \Leftrightarrow B \quad ?$$

(Bei Problemen vgl. Abschnitte 1.1 bis 1.3)

2. Wann sind obige Verknüpfungen *falsch*?

3. Wie lautet die Verneinung der Aussage über eine Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ und $x_0 \in \mathbf{R}$

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x\in\mathbf{R}} |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad ?$$

(Bei Problemen vgl. Abschnitte 1.6 und 1.7)

4. Wenden Sie das logische Distributivgesetz an auf

$$A \wedge (B \vee C)\,.$$

1.10 Formelsammlung für das Kapitel Logik

Wahrheitstafel

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Longrightarrow B$	$A \Longleftrightarrow B$
w	w	f	f	w	w	w	w
w	f	f	w	f	w	f	f
f	w	w	f	f	w	w	f
f	f	w	w	f	f	w	w

Sätze

1.	$(A \Rightarrow B)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg A \vee B)$	Implikation als $\neg$ und $\vee$ Verknüpfung
2.	$\neg(\neg A)$	$\Leftrightarrow$	A	Verneinung
3.	$(\neg(A \wedge B))$	$\Leftrightarrow$	$(\neg A \vee \neg B)$	DeMorgan
4.	$(\neg(A \vee B))$	$\Leftrightarrow$	$(\neg A \wedge \neg B)$	DeMorgan
5.	$(A \wedge (B \vee C))$	$\Leftrightarrow$	$((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$	Distributivgesetz
6.	$(A \vee (B \wedge C))$	$\Leftrightarrow$	$((A \vee B) \wedge (A \vee C))$	Distributivgesetz
7.	$(A \Rightarrow B)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg B \Rightarrow \neg A)$	Kontraposition
8.	$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C))$	$\Rightarrow$	$(A \Rightarrow C)$	Logisches Weiterschließen

Quantoren

$\bigvee$: „Es gibt mindestens ein …“ Existenzquantor

$\bigwedge$: „Für alle gilt …“ Allquantor

1.11 Aufgaben (Lösungen im Anhang)

Aufgabe 1 Die Aussage A stehe für „Berlin ist die Hauptstadt Deutschlands.“ (wahr) und die Aussage B für „Die Isar fließt durch Berlin.“(falsch).
Gesucht sind die Wahrheitswerte von:

1. $\neg A$
2. $A \wedge B$
3. $A \vee B$
4. $\neg A \vee B$
5. $A \Rightarrow \neg B$
6. $A \Leftrightarrow B$
7. $A \wedge \neg B$
8. $A \Leftrightarrow (A \Rightarrow \neg B)$

Aufgabe 2

1. Negieren Sie folgende Aussage:
   A: „Die Sonne scheint und wir gehen ins Schwimmbad.“
2. Bilden Sie die Kontraposition:
   B: „Wenn eine reelle Funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ in $x \in \mathbf{R}$ differenzierbar ist, dann ist f in x auch stetig.“

Aufgabe 3 Welche der folgenden Aussagen sind, unabhängig von den Wahrheitswerten von A und B, wahr?

1. $A \Leftrightarrow (A \wedge (A \vee B))$
2. $(B \Rightarrow A) \Rightarrow B$

Aufgabe 4 Welchen Wahrheitswert haben die folgenden Aussagen, die sich aus Verknüpfungen ergeben, wenn A wahr ist , B und C aber falsche Aussagen sind?

1. $(\neg A) \vee (\neg(B \vee C))$
2. $((A \wedge B) \vee (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C)$

Aufgabe 5 Vereinfachen Sie folgende Verknüpfungen von Aussagen/ Aussageformen :

1. $(\neg(A \wedge \neg B) \vee \neg C)$
2. $\neg((\neg A \wedge B) \vee \neg C)$

Aufgabe 6 Welche Wahrheitswerte müssen A, B, C und D haben, damit die folgenden Verknüpfungen wahr sind?

1. $A \wedge [\neg((C \Rightarrow D) \Leftrightarrow B)] \wedge [A \Rightarrow B]$
2. $(\neg(A \Leftrightarrow B)) \wedge B \wedge (B \Leftrightarrow \neg C) \wedge (C \vee D)$

Aufgabe 7 Mit den folgenden Aussagen A, B, C, D und E seien die folgenden logischen Implikationen gegeben:

$$A \Rightarrow (\neg B), (\neg C) \Rightarrow B, C \Rightarrow D, (\neg E) \Rightarrow (\neg D).$$

Alle Implikationen seien wahr. Die Aussage E sei falsch! Welche Wahrheitswerte haben A, B, C, D?

Aufgabe 8 Für die folgenden Implikationen gelte:

$A \Rightarrow B$	wahr
$A \Leftrightarrow B$	falsch
$(A \vee B) \Rightarrow C$	wahr
$(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg(C \Leftrightarrow D))$	falsch

Welche Wahrheitswerte haben A, B, C, D?

Aufgabe 9 Negieren Sie:

1. $2 < x^2 \leq 25$
2. Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $1 + 2 + 3 + \ldots n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
3. Für alle positiven Zahlen ε gibt es mindestens eine natürliche Zahl n mit
$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| \leq \varepsilon$$
4. Für alle positiven ε existiert mindestens eine natürliche Zahl n_0, sodass für alle $n \geq n_0$ und für alle $0 \leq x \leq 1$ gilt $x^n < \varepsilon$

Aufgabe 10 Abhängig vom Wert einer Booleschen Variablen WERT soll in einem Programm verzweigt werden. A, B, C, D, WERT1, WERT2 und WERT seien als Boolesche Variablen deklariert . Zwei Programmierer programmieren – jeder auf seine Weise – WERT wie folgt:

Programmierer 1:

```
WERT :=  NOT((NOT A AND B) OR (C AND D));
```

Programmierer 2:

```
WERT1 := A OR NOT B;
WERT2 := NOT C OR NOT D;
WERT  := WERT1 OR WERT2;
```

Hat WERT für alle möglichen Werte der Booleschen Variablen A, B, C und D in beiden Programmen jeweils den gleichen Wert?

Aufgabe 11 xMy bedeutet: „x ist Mutter von y“ und H sei die Menge aller Menschen.

Was bedeuten

1. $\bigwedge_{y \in H} \bigvee_{x \in H} xMy$
2. $\bigvee_{x \in H} \bigwedge_{y \in H} xMy$?

2 Mengen

Zur Vereinfachung vieler Formulierungen benutzen wir die Begriffe der (naiven) Mengenlehre. Nach Cantor (1845 – 1918) ist eine **Menge** die Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Die Objekte heißen **Elemente der Menge**. Im folgenden betrachten wir nur kurz einige wichtige **Notationen, Mengenoperationen** und **kartesische Produkte.**

2.1 Notationen

2.1.1 Elementbeziehung:

$a \in M$ . . . a ist Element der Menge M

$a \notin M$ . . . a ist **nicht** Element der Menge M

2.1.2 Wichtige Zahlenmengen:

$\mathbf{N} := \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbf{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ Menge der ganzen Zahlen

$\mathbf{Q} := \left\{ x \mid x = \dfrac{p}{q} \quad \text{mit} \quad p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N} \right\}$ Menge der rationalen Zahlen

$\mathbf{R}$ Menge der reellen Zahlen

Auf die Menge $\mathbf{R}$ der reellen Zahlen gehen wir im nächsten Abschnitt noch genauer ein.

In der Regel beschreiben wir Mengen durch definierende Eigenschaften, z.B.

$M :=$ Menge aller ganzen Zahlen, welche Lösungen der Gleichung $x^2 - x - 6 = 0$ sind, also

$$M := \left\{ x \in \mathbf{Z} \mid x^2 - x - 6 = 0 \right\} = \{-2, 3\}$$

Die definierende Eigenschaft – hier „$x^2 - x - 6 = 0$“ – ist in der Sprache der Logik eine Aussageform $A(x)$. Eine ganze Zahl x_0 gehört also zur obigen Menge M, wenn die Aussage $A(x_0)$ wahr ist.
Die Menge $\mathbf{Z}$ ist hier der Bezugsbereich für die Variable x.

Zwei Mengen heißen **gleich**, wenn sie dieselben Elemente haben.

Wir sehen oben, dass $\left\{ x \in \mathbf{Z} \mid x^2 - x - 6 = 0 \right\} = \{-2, 3\}$.

Eine Menge kann also verschiedene Darstellungen haben .

Es kann vorkommen, dass eine Menge überhaupt kein Element enthält.

Eine solche Menge wird **leere Menge** genannt und erhält das Symbol $\emptyset$.
Etwa ist $\left\{ x \in \mathbf{Q} \mid x^2 + 2x + 5 = 0 \right\} = \emptyset$

Eine Menge A heißt **Teilmenge** einer Menge B, wenn jedes Element von A auch in B enthalten ist.
Wir schreiben dann $A \subset B$; z.B. $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$.

Zwei nichtleere Mengen, die keine Elemente gemeinsam haben, heißen **disjunkt** .

Eine Menge A mit n Elementen, $n \in \mathbf{N}$, heißt **endliche Menge**.
Man notiert die Anzahl ihrer Elemente durch $|A|$.
Andernfalls spricht man von einer **unendlichen Menge**.

2.2 Mengenoperationen

Für je zwei Mengen A und B sind der **Durchschnitt** $A \cap B$, die **Vereinigung** $A \cup B$ und die **Differenz** $A \setminus B$ definiert durch

$$\boxed{\begin{aligned} A \cap B &:= \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} \\ A \cup B &:= \{x \mid x \in A \vee x \in B\} \\ A \setminus B &:= \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} \end{aligned}}$$

Wir zeigen ein kleines Beispiel für Problem-Formulierung und Lösung mit Hilfe dieser Begriffsbildungen:

Beispiel 1 Ein Meinungsforscher veröffentlicht das Ergebnis seiner Umfrage über die Beliebtheit von Bier und Wein.

Anzahl der Befragten:	100
Anzahl derer, die gern Bier trinken:	75
Anzahl derer, die gern Wein trinken:	68
Anzahl derer, die beides gern trinken:	42

Der Ruf dieses Meinungsforschers war damit ruiniert. Was meinen Sie, warum?

Lösung

$B :=$ Menge der Biertrinker; Anzahl $|B|$ der Elemente von $B = 75$
$W :=$ Menge der Weintrinker; Anzahl $|W|$ der Elemente von $W = 68$
$T :=$ Menge der Testpersonen; Anzahl $|T|$ der Elemente von $T = 100$

Vereinigt man die Menge der reinen Biertrinker $(B \setminus W)$ mit der Menge der Leute, die sowohl gerne Bier als auch Wein trinken $(B \cap W)$ und der Menge der reinen Weintrinker $(W \setminus B)$, dann ergibt sich für

$$T = (B \setminus W) \cup (B \cap W) \cup (W \setminus B)$$

$$B \setminus W = B \setminus (B \cap W) \text{ und } |B \setminus W| = |B| - |B \cap W| = 75 - 42 = 33$$

$$W \setminus B = W \setminus (B \cap W) \text{ und } |W \setminus B| = |W| - |B \cap W| = 68 - 42 = 26$$

Da die Mengen $(B \setminus W)$, $(B \cap W)$, $(W \setminus B)$ paarweise disjunkt sind, ergibt sich:

$$|T| = |B \setminus W| + |B \cap W| + |W \setminus B| = 33 + 42 + 26 = 101 .$$

Nun erkennen Sie die Schlamperei dieses Meinungsforschers.

2.3 Kartesische Produkte

Zu gegebenen Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ $(n \in \mathbf{N})$ bezeichnet

$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \ldots, x_n \in M_n\}$

das **kartesische Produkt** oder **direkte Produkt**
der Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_n$.

Ein Element $(x_1, \ldots, x_n)$ dieser Menge heißt ein **geordnetes n-Tupel** oder auch ein **Vektor mit** n **Komponenten oder Koordinaten** $x_i \in M_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

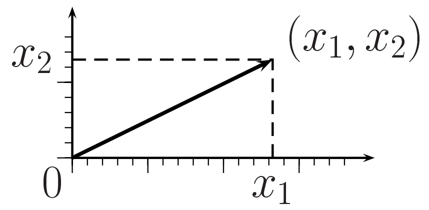
Falls $M_1 = M_2 = \ldots = M_n$, schreibt man auch M^n für $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$.

„Geordnet" heißt: Für (a, b) und (x, y) in $M_1 \times M_2$ gilt

$$(a, b) = (x, y) \iff (a = x) \wedge (b = y)\,.$$

Zum Beispiel $(2, 3) \neq (3, 2)$ in $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, d.h., es kommt auf die Reihenfolge der Komponenten wesentlich an.

Beispiel 1 Die Punkte der Ebene werden üblicherweise schon in der Schule durch **Ortsvektoren** in einem sog. kartesischen Koordinatensystem dargestellt.



Die Ebene wird also dargestellt durch das kartesische Produkt

$$\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in \mathbf{R}\,, x_2 \in \mathbf{R}\}\,.$$

Beispiel 2 Die Lösungen $x_1\,, x_2\,, x_3$ eines sog. linearen Gleichungssystems der Form

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2\\
&a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \ldots\ldots (a_{ij}\,, x_j\,, b_i \in \mathbf{R}\,,\ 1 \leq i\,, j \leq 3)
\end{aligned}$$

werden zusammengefaßt zu **Lösungsvektoren** $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$.

2.4 Kurztest zum Abschnitt Mengen

1. Beschreiben Sie den Würfel im ersten Quadranten mit der Seitenlänge 2m als kartesisches Produkt im $\mathbf{R}^3$ (Die reellen Achsen haben m als Längeneinheiten).

2. Beschreiben Sie die Menge $\{1, 2, 3, \}$ als Nullstellenmenge eines Polynoms. Wie lautet ein passendes Polynom?

3. Beschreiben Sie durch geeignete Durchschnitts-, Vereinigungs- und Differenzbildung:

   Die Menge aller Elemente, die nicht in A, aber in B und C enthalten sind. Dabei sind A, B, C Teilmengen einer gegebenen Grundmenge M.

2.5 Formelsammlung für das Kapitel Mengen

Zahlenmengen

$\mathbf{N} := \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbf{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbf{Q} := \left\{ x \mid x = \dfrac{p}{q} \quad \text{mit} \quad p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N} \right\}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbf{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$	Durchschnitt zweier Mengen
$\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$	Vereinigung zweier Mengen
$\mathbf{A} \backslash \mathbf{B}$	Differenz zweier Mengen (sprich: **A** ohne **B**)
$\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$	**A** ist Teilmenge von **B**
$\mathbf{M_1} \times \mathbf{M_2} \times \mathbf{M_3} \times \ldots \mathbf{M}_n$	kartesisches Produkt der Mengen $\mathbf{M_1}, \ldots, \mathbf{M}_n$

2.6 Aufgaben (Lösungen im Anhang)

Aufgabe 1 A, B, C seien Mengen. Man schraffiere in einem Venn-Diagramm:

1. $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$
2. $\mathbf{A} \cap \mathbf{C}$
3. $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}$
4. $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \backslash \mathbf{C}$
5. $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap \mathbf{C}$
6. $\mathbf{A} \backslash (\mathbf{B} \cup \mathbf{C})$

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass für die Mengen

$$\mathbf{A} := \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ Primzahl zwischen 4 und 15}\}$$
$$\mathbf{B} := \{z \in \mathbf{N} \mid (z^2 - 12z + 35)(z^2 - 24z + 143) = 0\}$$

gilt:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}$$

3 Reelle Zahlen

3.1 Vorbemerkungen

Die Lösungen von Gleichungen der Form $ax = b$ mit $a, b \in \mathbf{Z}$, $a \neq 0$, heißen rationale Zahlen

$$x = \frac{b}{a} \in \mathbf{Q}\,.$$

Wir setzen die Grundrechenregeln für das Rechnen mit rationalen Zahlen, d.h. die „Bruchrechnung" als bekannt voraus. Identifiziert man $\mathbf{Q}$ mit Punkten auf einer Zahlengerade so bemerkt man schnell, dass die Zahlengerade beliebig dicht mit rationalen Zahlen bepackt ist, denn

$$r_1\,, r_2 \in \mathbf{Q}\,, r_1 < r_2 \Longrightarrow \frac{r_1 + r_2}{2} \in \mathbf{Q} \quad \text{und} \quad r_1 < \frac{r_1 + r_2}{2} < r_2.$$

Hierbei gelten für die Ordnungsbeziehung:

a) Für ganze Zahlen p_1 und p_2: $\quad p_1 < p_2 :\Longleftrightarrow p_2 - p_1 \in \mathbf{N}$

b) Für rationale Zahlen $r_1 := \dfrac{p_1}{q_1}$ und $r_2 := \dfrac{p_2}{q_2}$ $(p_1, p_2 \in \mathbf{Z}\,, q_1, q_2 \in \mathbf{N})$:

$$r_1 < r_2 :\Longleftrightarrow p_1 q_2 < p_2 q_1$$

c) Wir schreiben $r_1 \leq r_2$, falls $r_1 < r_2$ oder $r_1 = r_2$, und auch $r_2 \geq r_1$ für $r_1 \leq r_2$.

Die Zahlengerade wird jedoch nicht völlig durch Q abgedeckt.

$$\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$$

Beweis Annahme: $\sqrt{2} = n \in \mathbf{Q}$. *Dann gäbe es teilerfremde* $p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}$ *mit* $n = \dfrac{p}{q}$. *Es wäre*

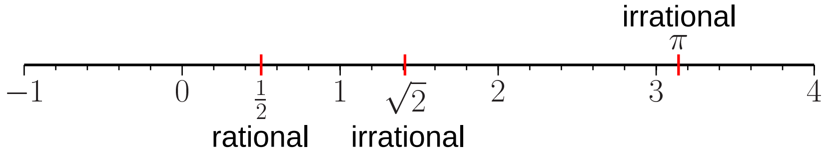
$$\frac{p^2}{q^2} = n^2 = 2, \quad \textit{also} \quad 2q^2 = p^2$$

und daher p^2 *gerade, was nur dann möglich ist, wenn* p *selbst gerade ist. Also gilt* $p = 2p'$ *mit* $p' \in \mathbf{Z}$, *was* $q^2 = 2p'^2$ *zur Folge hat. Wie vorher schließt man nun, dass mit* q^2 *auch* q *selbst gerade sein muss.*

Dies ist nun ein Widerspruch, denn gerade Zahlen p *und* q *sind nicht teilerfremd. Damit ist gezeigt, dass die Annahme* $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$ *falsch sein muss, also gilt* $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$ (vgl. 1.8 Widerspruchsbeweise).

Wir fassen daher die **Zahlengerade** als eine **Erweiterung von Q** auf und bezeichnen die Menge aller ihrer Punkte als **Menge R der reellen Zahlen**. Sie enthält **N**, **Z**, und **Q** als Teilmengen.

R $\setminus$ **Q** heißt **Menge der irrationalen Zahlen.**



3.2 Grundgesetze

Hier geben wir zunächst ein System von **Grundgesetzen** (sog. **Axiome**) an, welches die reellen Zahlen charakterisiert. Diese Grundgesetze sind es, die jeder Anwender von Mathematik immer wieder benutzt. Es handelt sich dabei um drei Typen von Grundgesetzen:

a) Grundgesetze der **Addition und Multiplikation**

b) Grundgesetze der **Anordnung**

c) Grundgesetz der **Vollständigkeit**

Grundgesetze der Addition

---

1) Durch die Addition $+$ wird je zwei reellen Zahlen a, b genau eine reelle Zahl $a + b$ zugeordnet.

2) Für $a, b \in \mathbf{R}$ gilt: $a + b = b + a$ (Kommutativgesetz)

3) Für $a, b, c \in \mathbf{R}$ gilt: $(a + b) + c = a + (b + c)$ (Assoziativgesetz)

4) Es gibt genau eine reelle Zahl $0 \in \mathbf{R}$ mit $0 + a = a$ für jedes $a \in \mathbf{R}$
(Existenz und Eindeutigkeit eines neutralen Elements)

5) Zu jedem $a \in \mathbf{R}$ gibt es genau eine Zahl $a^* \in \mathbf{R}$ mit $a + a^* = 0$
Schreibweise: $a^* = -a$
(Existenz und Eindeutigkeit der inversen Elemente)

Grundgesetze der Multiplikation

1) Durch die Multiplikation $\cdot$ wird je zwei reellen Zahlen a, b genau eine reelle Zahl $a \cdot b$ zugeordnet

2) Für $a, b \in \mathbf{R}$ gilt: $a \cdot b = b \cdot a$
(Kommutativgesetz)

3) Für $a, b, c \in \mathbf{R}$ gilt: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
(Assoziativgesetz)

4) Es gibt genau eine Zahl $1 \in \mathbf{R}$ mit $a \cdot 1 = a$ für jedes $a \in \mathbf{R}$
(Existenz und Eindeutigkeit des neutralen Elements)

5) Zu jeder von 0 verschiedenen Zahl $a \in \mathbf{R}$ gibt es genau eine Zahl $a^\sim \in \mathbf{R}$ mit $a \cdot a^\sim = 1$
Schreibweisen: $a^\sim = a^{-1}$ oder $a^\sim = \dfrac{1}{a}$
(Existenz und Eindeutigkeit der inversen Elemente in $\mathbf{R}\backslash\{0\}$)

6) Für $a, b, c \in \mathbf{R}$ gilt: $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
(Distributivgesetz)

Bemerkungen

1) Das Multiplikationszeichen $\cdot$ wird häufig weggelassen, d.h. man schreibt etwa $a(bc)$ statt $a \cdot (b \cdot c)$

2) Wegen der Assoziativgesetze braucht man Klammern nicht überall zu setzen:

$$a + b + c = (a + b) + c \quad \text{und} \quad abc = (ab)c$$

3) Übliche Schreibweisen sind: $a^0 = a \cdot a^{-1} = 1$ für $a \neq 0$, sowie $a^1 = a$, $a^2 = a \cdot a$, usw.

4) Es wird vereinbart, dass Multiplikationen vor Additionen ausgeführt werden; also kann geschrieben werden: $a(b + c) = ab + ac$

Aus diesen Grundgesetzen ergeben sich alle weiteren, oft benutzten Regeln für das Rechnen in den Grundrechenarten. Wir zeigen nur ein Beispiel:

Um die Gleichung $ax = b$ zu lösen, wobei a, b gegebene reelle Zahlen sind, $a \neq 0$, und x gesucht wird, rechnet man wie folgt:

$$ax = b \Longrightarrow a^{-1}ax = (a^{-1}a)x = a^{-1}b \Longrightarrow 1 \cdot x = x = a^{-1}b = \frac{b}{a}\,.$$

Grundgesetze der Anordnung

Hinter der „linearen Aufreihung“ der reellen Zahlen auf der Zahlengerade steckt die Existenz einer linearen Anordnung der reellen Zahlen.

Die schon definierte Anordnung für die Teilmengen $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$ von $\mathbf{R}$ wird dadurch fortgesetzt, daß man auch in $\mathbf{R}$ gewisse Elemente $x \in \mathbf{R}$ als **positiv** auszeichnet (Schreibweise: $x > 0$; x größer als 0), und zwar so, daß folgende **Anordnungsgesetze** erfüllt sind:

A1) Für jedes $x \in \mathbf{R}$ gilt genau eine der drei Beziehungen:
$x > 0$ oder $x = 0$ oder $-x > 0$

A2) Für $x, y \in \mathbf{R}$ gilt: $x > 0$ und $y > 0 \Longrightarrow x + y > 0$
(Monotonie der Addition)

A3) Für $x, y \in \mathbf{R}$ gilt: $x > 0$ und $y > 0 \Longrightarrow xy > 0$
(Monotonie der Multiplikation)

A4) Für alle $x > 0$, $y > 0$ in $\mathbf{R}$ gibt es eine natürliche Zahl n, so dass $nx > y$ ist.
($\mathbf{R}$ ist archimedisch geordnet)

A2) und A3) bedeuten kurz gesagt: Summen und Produkte positiver Zahlen sind wieder positiv. Aus A4) folgt zum Beispiel, dass es zu jeder reellen Zahl $y > 0$ eine natürliche Zahl n gibt, so dass $n > y$ ist (man setze $x = 1$ in A4). Hieraus folgt, dass zu jeder reellen Zahl x genau ein ganze Zahl n existiert, so dass $n \leq x < n + 1$ ist. Diese Zahl wird mit entier(x) oder [x] bezeichnet (vgl. später Abschnitt 6.3).

3.3 Ungleichungen

Notation $x > y :\Longleftrightarrow\ x - y > 0$

$x \geq y :\Longleftrightarrow\ x > y$ oder $x = y$

Statt $x > y$ (bzw. $x \geq y$) schreibt man auch $y < x$ (bzw. $y \leq x$)

Aus den Anordnungsaxiomen ergeben sich sämtliche Regeln für das Rechnen mit Ungleichungen. Wir überlegen einige Folgerungen:

Für $x, y, z \in \mathbf{R}$ gelten folgende **Vorzeichenregeln bei Ungleichungen:**

1) $x < 0 \iff -x > 0$
2) $x < y$ und $z > 0 \Longrightarrow xz < yz$
3) $x < y$ und $z < 0 \Longrightarrow xz > yz$
4) $x < y$ und $y < z \Longrightarrow x < z$
(Transitivität der Anordnung)
5) $x < y \Longrightarrow x + z < y + z$
(Erhaltung der Ungleichung bei Addition)
6) $x \neq 0 \Longrightarrow x^2 > 0$
(Reelle Quadratzahlen sind immer nicht-negativ)
7) $0 < x < y \Longrightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$
(Ungleichung für inverse positive Zahlen)

Wir zeigen nur für 1) und 2) die Begründung durch die Anordnungsgesetze und überlassen die Herleitung von 3) bis 7) dem Leser als Übung:

Zu 1) $x < 0 \iff 0 - x > 0 \iff -x > 0$ nach Definition der Anordnung.

Zu 2) $x < y$ und $z > 0 \Longrightarrow (y - x)z = yz - xz > 0 \Longrightarrow xz < yz$ nach dem Distributivgesetz und dem Anordnungsgesetz A2)

Mit den besprochenen Regeln lassen sich nun Lösungen von Ungleichungen ermitteln.

Beispiel 1 Gesucht ist die Lösungsmenge $L \subset \mathbf{R}$ der Ungleichung $\frac{3-x}{1+x} > 1$.

Lösung Fall 1) $1 + x > 0$: Dann ist

$$\frac{3-x}{1+x} > 1 \Longleftrightarrow (3 - x > 1 + x) \wedge (x > -1) \Longleftrightarrow -1 < x < 1\,.$$

D.h., jedes x mit $-1 < x < 1$ löst die Ungleichung.

Fall 2) $1 + x < 0$: Dann ist

$$\frac{3-x}{1+x} > 1 \Longleftrightarrow (1 < x) \wedge (x < -1)\,.$$

D.h., für diesen Fall gibt es keine Lösung der Ungleichung.

Insgesamt ergibt sich daher als Lösungsmenge

$$L = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 < x < 1\}\ .$$

3.4 Intervalle

Man führt **Intervalle** ein, z.B. zur einfachen Schreibweise für solche Lösungsmengen:

Für $a, b \in \mathbf{R}$ definiert man:

$[a, b]$	$:= \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$	(abgeschlossenes Intervall)
$]a, b[$	$:= \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$	(offenes Intervall)
$]a, b]$	$:= \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$	(links offen, rechts abgeschlossen)
$[a, b[$	$:= \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$	(links abgeschlossen, rechts offen)
$[a, \infty[$	$:= \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq a\}$	(nach oben unbeschränkt)
$]-\infty, b[$	$:= \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\}$	(nach unten unbeschränkt, nach oben offen)
usw.		

$]-\infty, +\infty[\, := \mathbf{R}$

Bemerkung Die Punkte a, b heißen **Randpunkte** der betreffenden obigen Intervalle, alle anderen Intervallpunkte heißen **innere Punkte**.

Intervalle haben keine Lücken, sie sind **zusammenhängend**.

Die Symbole $\infty\,, -\infty$ werden benützt, um anzuzeigen, daß die Intervalle $[a, \infty[$ (bzw. $]-\infty, b]$) nach oben (bzw. nach unten) offen, unberandet, **unbeschränkt** sind. Sie sind keine reellen Zahlen und es darf daher nicht mit ihnen gerechnet werden.

Abkürzungen, die häufig benutzt werden, sind:

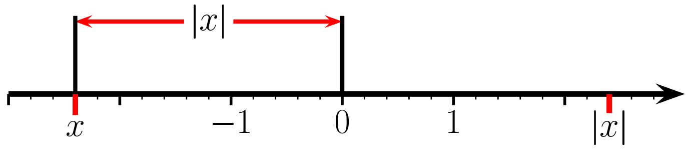
$\mathbf{R}^+ := \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$, $\quad \mathbf{R}^- := \{x \in \mathbf{R} \mid x < 0\}$,
$\mathbf{R}_0^+ := \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\}$, $\quad \mathbf{R}_0^- := \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 0\}$,
$\mathbf{N}_0 := \mathbf{N} \cup \{0\}$.

Offene Intervalle, die einen Punkt $a \in \mathbf{R}$ enthalten, heißen **Umgebungen** von a. Für $r > 0$ bezeichnet $U_r(a) := \,]a - r, a + r[$.

3.5 Beträge von reellen Zahlen

Man definiert für $x \in \mathbf{R}$ den **Betrag** $|x|$ von x durch

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{sonst} \end{cases}$$



$|x|$ gibt den **Abstand** von x zum Nullpunkt auf der Zahlengerade an.

Entsprechend ist $|x - y|$ der **Abstand der reellen Zahlen** x **und** y.

Aus den Anordnungsaxiomen ergeben sich unmittelbar für $x, y \in \mathbf{R}$:

1) $|x| \geq 0$

2) $|x| = 0 \iff x = 0$

3) $|x| = |-x|\,; \qquad |x|^2 = x^2$

4) Für jedes positive ϵ gilt:

$$|x| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$$

Speziell: $-|x| \leq x \leq |x|$

5) $|xy| = |x||y|$

6) $\dfrac{|x|}{|y|} = |\dfrac{x}{y}|$ für $y \neq 0$

Wir zeigen beispielsweise 5):
Für $x, y \in \mathbf{R}$ gilt:

$$|xy|^2 = (xy)^2 = x^2y^2 = |x|^2|y|^2 = (|x||y|)^2 \Longrightarrow |xy| = |x||y|\,.$$

Überlegen Sie selbst die anderen obigen Behauptungen!

Eines der wichtigsten Hilfsmittel in der Differential- und Integralrechnung ist die

Dreiecksungleichung: Für $x, y \in \mathbf{R}$ gilt:

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$$

Sie ist leicht einzusehen: Addition der Ungleichungen $-|x| \leq x \leq |x|$ und $-|y| \leq y \leq |y|$ ergibt

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq (|x| + |y|)$$

und damit $|x + y| \leq |x| + |y|$ nach 4).

Für $x, y \in \mathbf{R}$ gilt dann auch

$$|x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|.$$

Aus

$$|x| - |y| = |x + y + (-y)| - |y| \leq |x + y| + |-y| - |y| = |x + y|$$

ergibt sich durch Vertauschen von x und y:

$$||x| - |y|| = ||x| - | \pm y|| \leq |x \pm y|\,.$$

3.6 Schranken

Eine Menge $A \subset \mathbf{R}$ heißt **nach oben** (bzw. nach unten) **beschränkt**, wenn es eine reelle Zahl K gibt, so dass $x \leq K$ (bzw. $x \geq K$) für jedes $x \in A$. K heißt dann eine **obere** (bzw. untere) **Schranke für** A.

A heißt **beschränkt**, wenn A nach oben und nach unten beschränkt ist. Andernfalls heißt A **unbeschränkt**.

Beispiel 1 Jede endliche Teilmenge $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \mathbf{R}$ ist beschränkt, denn sie hat ein größtes Element M und ein kleinstes Element m.

Schreibweisen:

$M = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \ldots$ Maximum
$m \ = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \ldots$ Minimum

M,aber auch z.B. $M + 1$ sind dann obere Schranken,
m, aber auch z.B. $m - \dfrac{1}{1000}$ sind untere Schranken.

Beispiel 2 Unendliche Teilmengen von $\mathbf{R}$ können

a) beschränkt sein, z.B. $[a, b] \subset \mathbf{R}$, $\ a < b$, hat die unteren Schranken a, $a - 1$ und obere Schranken b, $\ b + \dfrac{1}{2}$.

b) einseitig beschränkt sein, z.B. ist $\mathbf{N}$ nach unten beschränkt durch 0, aber unbeschränkt nach oben. Auch $[a, \infty[$ ist einseitig beschränkt.

c) nach oben und nach unten unbeschränkt sein, wie z.B. die Menge $\mathbf{Q}$.

Beispiel 3 Eine nach oben beschränkte Menge mit unendlich vielen Elementen braucht kein größtes Element zu besitzen, wie etwa die Menge $]0, 1[\subset \mathbf{R}$ zeigt.

Definition *Eine obere Schranke $K \in \mathbf{R}$ heißt **Supremum** einer nach oben beschränkten Menge $A \subset \mathbf{R}$, wenn es keine noch kleinere obere Schranke für A gibt.*

*Man schreibt dann für diese **kleinste obere Schranke** $K = \sup A$.*

*Entsprechend heißt $k \in \mathbf{R}$ **Infimum** von $A \subset \mathbf{R}$, wenn k die **größte untere Schranke** von A ist, und man schreibt dann $\ k = \inf A$.*

Beispiel 4 $A := \left\{ x \in \mathbf{R} \mid x = \dfrac{1}{n}, \quad n \in \mathbf{N} \right\}$ hat kein Minimum.

$\inf A = 0, \quad \sup A = \max A = 1.$

Beispiel 5 $A := \left\{ x \in \mathbf{R} \mid x = \frac{n^2}{1+n^2}, \quad n \in \mathbf{N} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{9}{10}, \ldots \right\}$

$\inf A = \min A = \frac{1}{2}$; $\sup A = 1$, da $\frac{n^2}{1+n^2} < 1$ für jedes $n \in \mathbf{N}$, aber auch für jedes $y < 1$ und $n^2 > \frac{y}{1-y}$ gilt:

$$\frac{n^2}{1+n^2} > y \, ,$$

d.h. ein $y < 1$ ist schon keine obere Schranke mehr.

Mit diesen Begriffen über Schranken können wir nun die Menge $\mathbf{R}$ der reellen Zahlen vollständig charakterisieren:

3.7 Grundgesetz der Vollständigkeit von R

Sie haben sicherlich bemerkt, daß die bisher besprochenen Grundgesetze der Addition, Multiplikation und Anordnung alle auch von den rationalen Zahlen erfüllt werden. Um die Erweiterung von $\mathbf{Q}$ zu $\mathbf{R}$ zu charakterisieren, muss also noch eine Eigenschaft für $\mathbf{R}$ hinzukommen, die $\mathbf{Q}$ nicht besitzt. Diese ist die **Vollständigkeitseigenschaft**.

Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge $A \subset \mathbf{R}$ besitzt ein Supremum

Folgerung Jede nichtleere, nach unten beschränkte Menge $A \subset \mathbf{R}$ besitzt ein Infimum, denn dann ist $-A := \{x \in \mathbf{R} \mid -x \in A\}$ nach oben beschränkt und es gilt für $K \in \mathbf{R}$ und $x \in -A$:

$$(K \geq x) \iff (-K \leq -x) \, .$$

Daher $\sup(-A) = -\inf(A)$, also $\inf(A) = -\sup(-A)$.

Beispiel 1 $A := \left\{ 1 + \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbf{N} \right\}, \quad -A = \left\{ -1 - \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbf{N} \right\}$

$\inf A = 1, \quad \sup -A = -1$

Beispiel 2 Die Zahl $x = \sup A$ der nichtleeren, z.B. durch 3 nach oben beschränkten Menge $A := \left\{ a \in \mathbf{Q} \mid a^2 < 2 \right\}$ erfüllt die Gleichung $x^2 = 2$, definiert also jene Zahl, die man $\sqrt{2}$ nennt.

Analog erhält man die Existenz von Quadratwurzeln $\sqrt{a}$ in $\mathbf{R}$ für $a \in \mathbf{R}_0^+$, $\sqrt{a}^2 = a$ mit der Definition

$$\sqrt{a} := \sup \left\{ x \in \mathbf{Q} \mid x^2 < a \right\} \, .$$

Die Vollständigkeitseigenschaft ist es also, wodurch sich $\mathbf{R}$ und $\mathbf{Q}$ ganz wesentlich unterscheiden. Sie sichert die Lückenlosigkeit von $\mathbf{R}$. Bei jeder Art von späteren Grenzwertbildungen in der Differential- und Integralrechnung wird auf sie Bezug genommen.

3.8 Kurztest zum Abschnitt reelle Zahlen

1. Wie lautet die Dreiecksungleichung für reelle Zahlen?

2. Welche der folgende Ungleichungen gelten für beliebige positive Zahlen a, b mit $0 < a \leq b$?

$$\begin{aligned} a &\leq \sqrt{ab} \\ \sqrt{ab} &\leq \frac{a+b}{2} \\ \frac{a+b}{2} &\leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \\ \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} &\leq b \end{aligned}$$

3. Unter welchen Bedingungen an $a, b \in \mathbf{R}$ gilt

$$|ab| \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\ ?$$

4. Wie lauten $\inf(A)$ und $\sup(A)$ für die Menge

$$A = \left\{ x \in \mathbf{R} \;\middle|\; \bigvee_{n \in \mathbf{N}} x = 1 + \frac{n}{n^3+n} \right\} ?$$

3.9 Formelsammlung für das Kapitel reelle Zahlen

Intervalle

$[a, b]$	$:= \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$	(abgeschlossenes Intervall)
$]a, b[$	$:= \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$	(offenes Intervall)
$]a, b]$	$:= \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$	(links offen, rechts abgeschlossen)
$[a, b[$	$:= \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$	(links abgeschlossen, rechts offen)
$[a, \infty[$	$:= \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq a\}$	(nach oben unbeschränkt)
$]-\infty, b[$	$:= \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\}$	(nach unten unbeschränkt, nach oben offen)
usw.		
$]-\infty, +\infty[:= \mathbf{R}$		

Beträge

Für alle $x, y \in \mathbf{R}$ gelten:

1) $|x| \geq 0$

2) $|x| = 0 \iff x = 0$

3) $|x| = |-x|$; $\qquad |x|^2 = x^2$

4) Für jedes positive ϵ gilt:

$$|x| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$$

Speziell: $-|x| \leq x \leq |x|$

5) $|xy| = |x||y|$

6) $\dfrac{|x|}{|y|} = |\dfrac{x}{y}|$ für $y \neq 0$

Dreiecksungleichung

$$\bigwedge_{x,y\in\mathbf{R}} ||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$$

3.10 Aufgaben (Lösungen im Anhang)

Aufgabe 1 Man schreibe die Lösungen folgender Ungleichungen als Intervalle oder deren Vereinigung:

a) $x^2 < 4$

b) $x^2 \leq 4$

c) $x^2 > 4$

d) $4 + x \leq 5 - 3x$

e) $\dfrac{3x-4}{1-x} \leq 2$

f) $x^2 - 6x > 7$

g) $2x^2 - 10x - 14 \leq 2x$

h) $|-2x| > 4$

i) $|2x - 3| > 5$

Aufgabe 2 Veranschaulichen Sie auf der Zahlengerade:

a) $\mathbf{A} = \left\{x \in \mathbf{R} \;\middle|\; x \neq \frac{5}{2}, \frac{1-x}{2x-5} < 2\right\}$

b) $\mathbf{B} = \{x \in \mathbf{R} \mid |x-3| > 5\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid |x-2| \leq 7\}$

Aufgabe 3 Man bestimme, falls existent, für folgende Mengen Supremum, Maximum, Infimum und Minimum:

a) $[-1, 3[$

b) $[-1, 3]$

c) $]-1, 3[$

d) $]-\infty, -2[$

e) $]0, \infty[$

f) $]-\infty, 0]$

g) $\left\{x \in \mathbf{R} \;\middle|\; x = \dfrac{n^2+1}{n^2}, n \in \mathbf{N}\right\}$

h) $\{z \in \mathbf{Z} \mid z = (-1)^n, n \in \mathbf{N}\}$

i) $\left\{x \in \mathbf{Q} \;\middle|\; x = \dfrac{2}{7^n}, n \in \mathbf{N}\right\}$

Aufgabe 4 Für welche $t \in \mathbf{R}$ hat die Gleichung

$$4x^2 + 8tx - 4t + 24 = 0$$

keine reelle Lösung?

4 Produkte, Summen, Fakultäten, Binomialkoeffizienten

Wir notieren hier einige weitere Bezeichnungsweisen:

1. Für reelle Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots$ bezeichnen wir ihr **Produkt** mit

$$\prod_{i=1}^{n} x_i := x_1 x_2 \cdots x_n$$

Rekursiv definiert für $n \in \mathbf{N}$:

$$\prod_{i=1}^{n+1} x_i := x_{n+1} \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i$$

Der **Index** i dient nur der Numerierung der Faktoren und kann beliebig umbenannt werden:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = \prod_{k=1}^{n} x_k$$

2. Für natürliche Zahlen n definiert man die **Fakultäten** $n!$ durch

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

Ergänzend hierzu setzt man $0! := 1$, und erhält **rekursiv** geschrieben für $n \in \mathbf{N}$:

$$n! = (n-1)! \cdot n$$

3. Für $k \in \mathbf{N}$ und $\alpha \in \mathbf{R}$ definiert man den **Binomialkoeffizienten** durch

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (\alpha - i) = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

Beispiele

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

$\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{60}{6} = 10$

$\binom{-0.5}{4} = \frac{(-0.5)(-1.5)(-2.5)(-3.5)}{4!} = 0.2734$

$\binom{3}{-4}$ ist nicht definiert.

Für $n, k \in \mathbf{N},\ k > n$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (n-i) = 0\,,$$

da wegen $k > n$ ein Faktor im Produkt verschwindet, wenn

$i = n \leq k - 1$.

Für $k \leq n$ ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-k)(n-k-1)\cdots 2\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\cdots 2\cdot 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

und

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$$
$$= \frac{(n-1)!k + (n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Wir fassen zusammen:
Für $n, k \in \mathbf{N},\ k \leq n$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Diese Formel bietet eine Möglichkeit, die Binomialkoeffizienten rekursiv zu berechnen; man kann sie anordnen im sog. **Pascalschen Dreieck:**

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Statt $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ für die **Summe** von reellen Zahlen a_i; $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ zu schreiben, notiert man kürzer:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Wieder dient der **Summenindex** i nur der Numerierung der Summanden.

Er kann beliebig umbenannt oder transformiert werden.

Beispiel 1 $\quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i := \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} = 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} 2^j$

Hier wurde der Index i außer zur Numerierung auch zur Berechnung des i-ten Summanden $a_i = 2^{i-1}$ benutzt.

Beispiel 2 $\quad \displaystyle\sum_{k=6}^{12} \frac{1}{3+k} = \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{15} = \sum_{\mu=9}^{15} \frac{1}{\mu}$

Beispiel 3 Summiert man n Summanden mit dem Wert 2 auf:

$$\sum_{j=1}^{n} 2 = 2 + 2 + \ldots + 2 = 2n$$

Beispiel 4 Für eine reelle Zahl x ist $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots - \frac{x^{11}}{11!} = \sum_{k=0}^{5} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

Das Distributivgesetz für Summen in $\mathbf{R}$ lautet in dieser Schreibweise:

$$\sum_{i=1}^{n} r a_i = r \sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{für } r, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$$

4.1 Geometrische Reihen

Die Summe

$$\sum_{k=0}^{N} q^k$$

nennt man eine (endliche) **geometrische Reihe**.

Solche Reihen spielen eine herausragende Rolle z.B. in der Finanzmathematik, aber – wie Sie im Studium sehen werden – auch in der Analysis und anderen Teilgebieten der Mathematik.

Für alle natürlichen Zahlen N und $q \neq 1$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{N} q^k = \frac{q^{N+1} - 1}{q - 1}\,.$$

Denn:

$$\sum_{k=0}^{N} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^N$$
$$q \cdot \sum_{k=0}^{N} q^k = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{N+1}$$

Subtrahieren Sie die zweite von der ersten Zeile und dividieren Sie beide Seiten der entstehenden neuen Gleichung anschließend durch $(1 - q)$, dann erhalten Sie als Ergebnis die angegebene Formel.

Beispiel Jemand will auf legale Weise nach 10 Jahren des Betrags von 100 000 Euro habhaft werden. Hierzu möchte er am Ende jedes Jahres einen festen, stets gleichen Betrag sparen und festverzinslich bei 6 % Zins anlegen.

Welchen Betrag r muß er jährlich anlegen, um sein Sparziel zu erreichen?

Lösung Die Zinsen werden nachschüssig bezahlt. Mit $N = 9$, $n = N + 1$, $q = 1{,}06$ ergibt sich die jährliche Sparrate r aus

$$S_n = r s_n \quad \text{mit} \quad S_n = 100000\,\text{Euro},$$
$$s_n = \sum_{k=0}^{N} q^k = \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

also

$$r = 100000 \cdot \frac{0{,}06}{1{,}06^{10} - 1}\,\text{Euro} = 7586{,}80\,\text{Euro}\,.$$

4.2 Formelsammlung „Produkte und Summen“ (Teil 1)

Summen

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{\lambda=1}^{n} a_\lambda = a_1 + a_2 + a_3 + \dots a_n$$

$$= a_1 + \sum_{m=2}^{n} a_m = \sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n = \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu + \sum_{\eta=1+m}^{n} a_\eta \quad \text{mit } (m < n)$$

Rechenregeln

1. Bei gleichen Grenzen gilt: $\sum_{\mu=1}^{n} b_\mu + \sum_{\eta=1}^{n} a_\eta = \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)$

2. mit $c = const.$: $\sum_{k=1}^{n} c \cdot a_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k$

3. mit $c = const.$: $\sum_{k=1}^{n} c = n \cdot c$

4. Doppelsumme: $\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{m} b_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_i b_k$

5. $\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} = a_{11} + a_{12} + a_{13} \dots + a_{1m} + a_{21} + a_{22} \dots + a_{2m} + \dots a_{n1} + a_{n2} + a_{n3} \dots + a_{nm}$

6. Indextransformation: siehe Aufgabe 4

Produkte

$$\prod_{j=1}^{n} a_j = \prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{\lambda=1}^{n} a_\lambda = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n$$

$$= a_1 \cdot \prod_{m=2}^{n} a_m = a_n \cdot \prod_{k=1}^{n-1} a_k = \prod_{\mu=1}^{m} a_\mu \cdot \prod_{\eta=1+m}^{n} a_\eta \quad \text{mit } m < n.$$

Rechenregeln

1. Bei gleichen Grenzen gilt: $\prod_{\mu=1}^{n} b_\mu \cdot \prod_{\eta=1}^{n} a_\eta = \prod_{j=1}^{n}(a_j b_j)$

2. mit $c = const.$: $\prod_{j=1}^{n} c \cdot a_j = c^n \prod_{j=1}^{n} a_j$

3. mit $c = const.$: $\prod_{j=1}^{n} c = c^n$

4.3 Formelsammlung „Produkte und Summen“ (Teil 2)

Fakultät

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = \prod_{k=1}^{n} k$ und als Konvention: $0! = 1$

Binomialsatz

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k
\end{aligned}
$$

Pascalsches Dreieck:

1	$\binom{0}{0}$
1 1	$\binom{1}{k}$ für $k = 0, 1$
1 2 1	$\binom{2}{k}$ für $k = 0, 1, 2$
1 3 3 1	$\binom{3}{k}$ für $k = 0, 1, 2, 3$
1 4 6 4 1	$\binom{4}{k}$ für $k = 0, 1, 2, 3, 4$

Binomialkoeffizienten (BK)

$$\bigwedge_{\alpha \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{N}} \binom{\alpha}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (\alpha - i) = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(k-1))}{k!}$$

$$\bigwedge_{n,k \in \mathbf{N}, k \leq n} \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Rechenregeln

a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ Symmetrie des Pascalschen Dreiecks

b) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ rekursive Berechnung der BK

c) $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$

d) $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ Summe der BK in der n-ten Reihe

e) $(n+1)! = n!(n+1)$

4.4 Kurztest zum Abschnitt Summen und Produkte

1. Wie läßt sich
$$\binom{n}{k} \quad \text{für} \quad n, k \in \mathbf{R}, \quad n \geq k$$
mit Hilfe der Größen $n!, k!$ und $(n-k)!$ ausdrücken?

2. Wie lautet der Binomialsatz für
$$(x+y)^n, \quad x, y \in \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{N}\,?$$

3. Schreiben Sie mit $\sum$-Zeichen:
$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}.$$

4. Transformieren Sie die folgende Summe so, dass der Index bei Null beginnt:
$$\sum_{n=3}^{m} q^{n-1}.$$

4.5 Aufgaben (Lösungen im Anhang)

Aufgabe 1 Schreiben Sie die ersten und letzten drei Glieder:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2$

b) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n+2} (k-2)!$

Aufgabe 2 Schreiben Sie mit $\sum$ und $\prod$-Zeichen:

a) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$

b) $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320}$

c) $\frac{11}{4} \cdot \frac{22}{8} \cdot \frac{33}{16} \cdot \frac{44}{32} \cdot \frac{55}{64} \cdot \frac{66}{128}$

Aufgabe 3 Berechnen Sie die folgenden Summen (Konvention $a^0 = 1$ für $a \in \mathbf{R}$):

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1+(-1)^k}{2}$

b) $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} (b_1 + c)$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+10} (5-7k) + \sum_{k=1}^{n+9} (7k-2) + 6$

Aufgabe 4 Gegeben ist die Summe:

$$\sum_{i=12}^{22} 2^{i-5}$$

Führen Sie eine Indextransformation so durch, dass

a) der allgemeine Summand 2^k lautet.

b) die untere Indexgrenze bei $m = 0$ liegt.

c) die obere Indexgrenze bei $n = 50$ liegt.

Aufgabe 5 Formen Sie jeweils so um, dass der Summenindex bei Null beginnt:

a) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} 2^{k-3} x^n$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} x^{2i}$

Aufgabe 6 Berechnen Sie:

a) $\dbinom{11}{4}$

b) $\dbinom{4,5}{2}$

c) $8!$

d) $\dbinom{850}{847}$

e) $\dbinom{-11}{4}$

5 Vollständige Induktion

Häufig will man Aussagen $A(n)$ über die Gesamtheit aller natürlichen Zahlen machen, z.B. eine für jedes $n \in \mathbf{N}$ gültige Formel zeigen – etwa:

Für jede natürliche Zahl n gilt die Aussage $A(n)$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$

Zur Begründung solcher Aussagen verwendet man das **Beweisprinzip der vollständigen Induktion**.

Seine Wirkungsweise ist leicht einzusehen:
Man zeigt zunächst die Richtigkeit der betreffenden Aussage $A(n_0)$ für die Startnummer $n_0 = 1$. Gelingt es dann, aus der Gültigkeit von $A(m)$ **für ein beliebiges $m \in \mathbf{N}$ auch auf die Gültigkeit von $A(m+1)$ für den Nachfolger $(m+1)$ zu schließen,** so erhält man, ausgehend von der Startnummer $m = n_0 = 1$, damit die Richtigkeit von $A(2) = A(n_0+1)$. Wiederholte Argumentation liefert $A(3), A(4)$ usw., d.h. $A(n)$ für schließlich jedes $n \in \mathbf{N}$.

Behauptet wird etwa wie oben die Gültigkeit der Formel $A(n)$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2 \qquad \textbf{für jedes } n \in \mathbf{N},$$

d.h., daß die Summe der ersten n ungeraden Zahlen immer n^2 ergibt.

Beweis *Es gilt für $(n_0 = 1)$:*

$$A(n_0) = \sum_{k=1}^{n_0}(2k-1) = \sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 1 = n_0^2$$

Sei nun $m \geq n_0$ beliebig gewählt:
Vorausgesetzt *sei die Richtigkeit von*

$$A(m)\colon \sum_{k=1}^{m}(2k-1) = m^2$$

Gemäß dem Induktionsprinzip ist dann $A(m+1)$ zu zeigen, d.h., zu zeigen ist:

$$A(m+1) = \sum_{k=1}^{m+1}(2k-1) = (m+1)^2.$$

Nun ist also mit Hilfe der Voraussetzung

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1}(2k-1) &= (2(m+1)-1) + \sum_{k=1}^{m}(2k-1)\\ &= (2m+1) + m^2 = (m+1)^2\end{aligned}$$

Damit ist die obige Formel für alle natürlichen Zahlen bereits bewiesen.

Wenn Sie also selbst einmal eine ähnliche Formel finden (oder erfinden), so ist es ratsam, deren Richtigkeit z.B. mit vollständiger Induktion zu testen!

Analog wie oben argumentiert man, wenn man Aussagen über die Gesamtheit der ganzen Zahlen oder über alle ganzen Zahlen ab einer Startzahl n_0 vorliegen hat. Wir formulieren noch einmal zusammengefasst:

Beweisprinzip der vollständigen Induktion

Um eine Aussage $A(n)$ für alle $n \geq n_0,\ n_0 \in \mathbf{Z}$ zu beweisen, genügt es, zu zeigen:

1) *(Induktionsanfang)* $A(n_0)$ ist richtig

2) *(Induktionsschritt)* Für beliebiges $m \geq n_0$ gilt:

Wenn $A(m)$ richtig ist, dann ist auch $A(m+1)$ richtig.

$$\bigwedge_{m \geq n_0,\, m \in \mathbf{Z}} A(m) \Longrightarrow A(m+1)$$

5.1 Beispiele

Beispiel 1 **Bernoullische Ungleichung**

Für alle $n \in \mathbf{N}$ und alle reellen Zahlen $x \geq -1$ gilt:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

denn:
Induktionsanfang: *Für* $n = 1$ *gilt:* $(1+x)^1 = 1 + x$

Induktionsvoraussetzung: *Für* $m \in \mathbf{N}, m \geq 1$ *gelte nun* $(1+x)^m \geq 1 + mx$.

Da $(1+x) \geq 0$, *folgt durch Multiplikation mit* $(1+x)$*:*

$$\begin{aligned}(1+x)^{m+1} &= (1+x)(1+x)^m \geq (1+x)(1+mx) = 1 + x + mx + mx^2\\ &= 1 + (m+1)x + mx^2 \geq 1 + (m+1)x\,.\end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsschritt geleistet, die Ungleichung ist also nach dem Induktionsprinzip richtig für alle $n \in \mathbf{N}$. *Wir werden sie wiederholt benutzen.*

Beispiel 2 *Es gilt* $2^n > n$ *für alle* $n \in \mathbf{N}$*:*

Induktionsanfang: *Die Behauptung ist richtig für* $n_0 = 1$*:* $2^1 > 1$

Induktionsvoraussetzung: *Wenn* $2^m > m$ *für* $m \geq 1$, *dann gilt auch*

$$2^{m+1} = 2 \cdot 2^m > 2m = m + m \geq m + 1\,.$$

Gemäß dem Induktionsprinzip ist damit die Behauptung gezeigt.

Beispiel 3 *Es gilt $n! > 2^{n-1}$ für alle $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$:*

Induktionsanfang: $3! = 6 > 2^2 = 4$

Induktionsvoraussetzung: $m! > 2^{m-1}$ *sei richtig für* $m \geq 3$

Dann folgt der Induktionsschritt:

$$(m+1)! = m!(m+1) > (m+1)2^{m-1} > 2 \cdot 2^{m-1} = 2^m$$

Als letztes wichtiges Beispiel wollen wir den sog. Binomialsatz mittels vollständiger Induktion beweisen. Dieser Induktionsbeweis ist auch eine gute Übung im Umgang mit Summen. Er hat seinen Namen von den auftretenden Binomialkoeffizienten.

Beispiel 4 **Binomialsatz:** *Für $x, y \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbf{N}$ gilt:*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\, y^k$$

Beweis: Seien $x, y \in \mathbf{R}$ beliebig gewählt.

1) *Induktionsanfang*: Für $n = 1$ ist

$$(x+y)^1 = x + y \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{1}{k} x^{n-k} y^k = x + y$$

2) *Induktionsvoraussetzung*: Die Formel gelte bereits für $m \in \mathbf{N}$.

Im Induktionsschritt ist zu zeigen:

$$\sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} x^{m+1-k} y^k = (x+y)^{m+1}\,.$$

Es ist:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{m+1} &= (x+y)^m (x+y) \overset{\text{Vor.}}{=} \left[\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{m-k} y^k\right](x+y) \\
&= \left[\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{m-k+1} y^k\right] + \left[\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{m-k} y^{k+1}\right] \\
&= \left[x^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} x^{m-k+1} y^k\right] + \left[\sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} x^{m-k} y^{k+1} + y^{m+1}\right] \\
&= \left[x^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} x^{m-k+1} y^k\right] + \left[\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k-1} x^{m-k+1} y^k + y^{m+1}\right].
\end{aligned}$$

Mit $\binom{m+1}{0} = \binom{m+1}{m+1} = 1$ erhält man:

$$\begin{aligned}
&\binom{m+1}{0} x^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \left[\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1}\right] x^{m+1-k}\, y^k + \binom{m+1}{m+1} y^{m+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} x^{m+1-k}\, y^k.
\end{aligned}$$

Sie werden diesen Satz im Studium beim Aufbau der Mathematik entscheidend benutzen lernen.

5.2 Kurztest zum Abschnitt vollständige Induktion

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Welche Schritte sind zu zeigen?

5.3 Aufgabe (Lösung im Anhang)

Aufgabe 1 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion

$$\bigwedge_{n\in\mathbf{N}} \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

6 Abbildungen, reelle Funktionen

In diesem Kapitel werden einige Grundbegriffe über reelle Funktionen wiederholt. Hierzu zählen insbesondere auch Potenz-, Wurzel-, Exponential-, Logarithmus-Funktionen und trigonometrische Funktionen mit ihren Eigenschaften. Aus diesen Eigenschaften ergeben sich die **Rechengesetze** beim Umgang mit solchen Funktionen.

Da bei Studienanfängern häufig gerade beim Rechnen mit diesen elementaren Funktionen große Schwächen festzustellen sind, legen wir Ihnen besonders die Übungsaufgaben des Kapitels zum Selbsttest ans Herz. Viele weitere Aufgaben ähnlichen Typs finden Sie in Schulbüchern. Lesen Sie darin und arbeiten Sie damit!
In üblichen Grundvorlesungen über Mathematik werden die elementaren Funktionen nochmals genau eingeführt und ihre Eigenschaften behandelt. Warum? Fragen Sie sich z. B. einmal, wie Sie **ohne Taschenrecher** etwa $\cos(x)$ oder e^x für z. B. $x = 1$ oder $x = 2$ berechnen könnten. Im Studium lernen Sie:

$$\cos(x) \approx \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{und} \quad e^x \approx \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} \quad \text{für große } \mathbf{N}$$

Dies zeigt, warum **Summen** (Abschnitt 4) überaus wichtig sind. Durch Eigenschaften solcher Summen und ihrer **Grenzwerte** ergeben sich Eigenschaften elementarer Funktionen; z. B. sehen Sie, dass die obige Näherungssumme für $\cos(x)$ eine **gerade Funktion** ist. Diese Eigenschaft erbt die cos-Funktion. Aus den Näherungssummen der e-Funktion ergeben sich mit Hilfe des **Binomialsatzes** alle Rechengesetze für Potenzen, Wurzeln und Logarithmen. Dies ist Stoff im Studium.

6.1 Definitionen (1. Teil)

Seien $\mathbf{D}$ und $\mathbf{B}$ nichtleere Mengen

1. Eine Vorschrift f, welche **jedem** $x \in \mathbf{D}$ **genau ein** Element $y \in \mathbf{B}$ zuordnet, heißt eine **Abbildung** oder **Funktion** von $\mathbf{D}$ nach $\mathbf{B}$.

   Symbolisch: $\begin{array}{c} f\colon \mathbf{D} \to \mathbf{B} \\ x \to y = f(x) \end{array}$ oder $\begin{array}{c} \mathbf{D} \xrightarrow{f} \mathbf{B} \\ x \to f(x) \end{array}$

Man nennt

$\mathbf{D}$	**Definitionsbereich**,
$\mathbf{B}$	**Bildbereich** von f ,
$x \in \mathbf{D}$	einen **Urbildpunkt**,
$y = f(x) \in \mathbf{B}$	**Bildpunkt** oder **Wert** von f an der Stelle x,
$W_f := \{y \in \mathbf{B} \mid y = f(x) \text{ für ein } x \in \mathbf{D}\}$	**Wertebereich** von f
$f(A) := \{y \in \mathbf{B} \mid y = f(x) \text{ für ein } x \in \mathbf{A}\}$	**Bild** von $\mathbf{A} \subset \mathbf{D}$ unter f

Beachten Sie den Unterschied zwischen $f(x)$ und $f(A)$:

$f(A)$ ist eine **Menge** von Bildpunkten und kein Funktionswert wie $f(x)$ für $x \in \mathbf{D}$!

2. Die Teilmenge

$$\mathbf{G}_f := \{(x, y) \mid x \in \mathbf{D}, \quad y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbf{D}\}$$

von $\mathbf{D} \times \mathbf{B}$ heißt **Graph** von f

3. Für f: $\mathbf{D} \to \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \subset \mathbf{D}$ heißt die Abbildung g: $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$, $x \to f(x)$, die durch Einschränkung des Definitionsbereiches von f auf $\mathbf{A}$ entsteht, die **Einschränkung** oder **Restriktion von** f **auf A**. Man schreibt dafür auch

$$f|_{\mathbf{A}}\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}, \quad x \to f(x)$$

4. f heißt **injektiv** genau dann, wenn für je zwei $x_1,\ x_2 \in \mathbf{D}$ mit $x_1 \neq x_2$ auch $f(x_1) \neq f(x_2)$ gilt.

f heißt **surjektiv**, wenn $\mathbf{W}_f = \mathbf{B}$, und **bijektiv**, wenn f injektiv und surjektiv ist.

5. Zu einer bijektiven Abbildung f: $\mathbf{D} \to \mathbf{B}$ gibt es die **Umkehrabbildung**

$$f^{-1} : \mathbf{B} \to \mathbf{D},$$

definiert durch

$$f^{-1}(y) := x \qquad \text{für} \quad y = f(x), \quad x \in \mathbf{D}\,.$$

Stets gelten dann $f(f^{-1}(y)) = y$ und $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in \mathbf{D}$ und alle $y \in \mathbf{B}$.

6. Für f: $\mathbf{D} \to \mathbf{B}$ und g: $\mathbf{B} \to \mathbf{C}$ heißt die Abbildung $g \circ f$: $\mathbf{D} \to \mathbf{C}$, definiert durch $g \circ f(x) := g(f(x))$ die **Verkettung** oder **Komposition** von f und g.

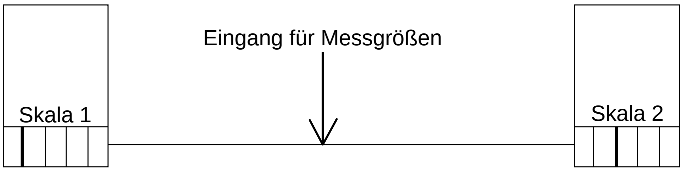
(Sprechweise für $g \circ f$: „g nach f")

7. Falls $\mathbf{B} \subset \mathbf{R}$ ist, sprechen wir von **reellwertigen Funktionen**, falls $\mathbf{D} \subset \mathbf{R}$ und $\mathbf{B} \subset \mathbf{R}$, von **reellen Funktionen**.

Nach all diesen Begriffsdefinitionen brauchen wir natürlich Beispiele.

Beispiel 1 **D** und **B** müssen keine Zahlenmengen sein und die Abbildungsvorschrift f muss kein Rechenausdruck zur Festlegung des Wertes sein.

Man denke sich eine Apparatur als Versuchs- oder Messanordnung .



Der jeweilige **Zustand der Apparatur** ist durch die Zeigerstände auf den Skalen 1 und 2 gegeben. Dabei kommt es auf die Reihenfolge der Zeigerstände bei der Zustandsnotation wesentlich an: Notiere zuerst Zeigerstand 1 auf Skala 1, d.h. eine Zahl x, dann den Zeigerstand auf Skala 2, d.h. eine Zahl y. M.a.W., man notiert ein Zahlenpaar (x, y). Charakteristisch für eine Apparatur, die deterministisch funktioniert, ist folgendes:

Wenn (x, y) und (x', y') Zustände der Apparatur wiedergeben und dabei $x = x'$ ist, dann gilt auch $y = y'$. D.h., jedem Zeigerstand x der Skala 1 ist genau ein Zeigerstand y auf Skala 2 zugeordnet; dadurch ist eine Abbildung f definiert. Im Sinn unserer Definition ist die Menge der Zustände (x, y) gerade der Graph G_f von f.

Es mag schwer oder gar unmöglich sein, die Wirkungsweise einer Apparatur durch eine Formel oder Rechenvorschrift zur Beschreibung der Abbildung f anzugeben.

Beispiel 2 Durch eine Preisliste für die verschiedenen Autotypen und Sonderausstattungen eines Automobil-Herstellers wird jedem Wagen der Produktionspalette genau ein Preis zugeordnet, also eine Abbildung definiert. Ihr Definitionsbereich entspricht der Produktionspalette, ist also keine Zahlenmenge. Diese Abbildung läßt sich vermutlich kaum als eine Rechenvorschrift formulieren, nach der die Preise errechnet werden. Manche Preise für Sonderausstattungen scheinen vielleicht in keinerlei logisches Gesetz zu passen.

Beispiel 3 Für feste Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ wird durch die Vorschrift

$$f(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

eine Funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definiert.

Falls $a_n \neq 0$, heißt sie ein **Polynom vom Grad** n in **R**.

Die a_k, mit $1 \leq k \leq n$ heißen **Koeffizienten** des Polynoms.

Beispiel 4 Durch Addition und Multiplikation in **R** werden Abbildungen von $\mathbf{R}^2$ nach **R** definiert:

Addition: $\begin{array}{c} \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \\ (x, y) \to x + y \end{array}$ und Multiplikation: $\begin{array}{c} \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \\ (x, y) \to x \cdot y \end{array}$

Beispiel 5 Die Funktion

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,, \quad f(x) := x^2$$

ist **nicht injektiv** und **nicht surjektiv**, da $f(+1) = f(-1)$ ist und z.B. -2 nicht als Wert von f auftritt.

Aber die Funktion

$$\tilde{f} : \mathbf{R}_0^+ \to \mathbf{R}_0^+, \quad \tilde{f}(x) := x^2,$$

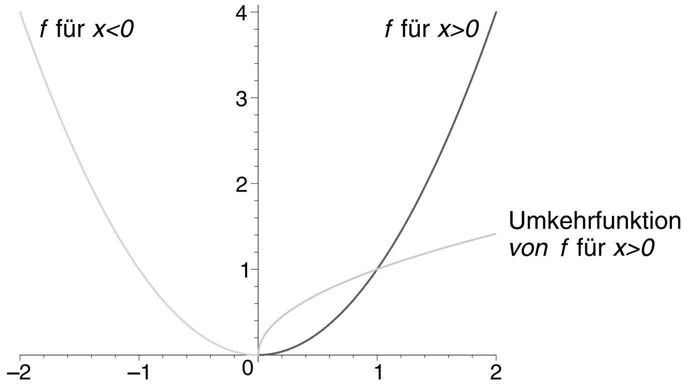
die durch Einschränkung des Definitionsbereiches von f auf $\mathbf{R}_0^+$ und Einschränkung des Bildbereiches auf den Wertebereich von f entsteht, ist **bijektiv**.

Denn zu jedem $y \in \mathbf{R}_0^+$ existiert genau ein $x \in \mathbf{R}_0^+$ mit $y = x^2$, nämlich $x = \sqrt{y} = \sqrt{x^2}$.

Die Umkehrabbildung $\tilde{f}^{-1}\colon \mathbf{R}_0^+ \to \mathbf{R}_0^+$ existiert und ist gegeben durch

$$\tilde{f}^{-1}(y) = \tilde{f}^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = x = \sqrt{y} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{f}^{-1}(x) = \sqrt{x},$$

wenn man die Variable wie üblich wieder mit x bezeichnet.



Beachten Sie:

1. $\tilde{f}^{-1}(x) \neq \dfrac{1}{\tilde{f}(x)}$

2. **Nicht** $\sqrt{x^2} = \pm x\,.$

   Die Wurzelfunktion

   $$\tilde{f}^{-1}$$

   ist nur für nichtnegative reelle Zahlen definiert und ihre Werte, d.h. Quadratwurzeln, sind stets nicht negativ! Für $x \in \mathbf{R}$ ist also

   $$\sqrt{x^2} = |x|;$$

   der nicht negativen reellen Zahl $x^2 = |x|^2$ wird ihre nicht negative Quadratwurzel $|x|$ durch

   $$\tilde{f}^{-1}$$

   zugeordnet.

Beispiel 6 Für $f\colon \mathbf{R}_0^+ \to \mathbf{R},\ f(x) := \sqrt{x}$ und $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ g(x) := -x$ ist die Verkettung

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = -\sqrt{x}$$

Beachten Sie:

$$g \circ f \neq f \circ g\,,$$

denn $(f \circ g)(x) = \sqrt{-x}$ ist für positive x im Definitionsbereich $\mathbf{D}_g = \mathbf{R}$ von g nicht einmal definiert.

6.2 Operationen mit reellwertigen Funktionen

Seien f und g reellwertige Funktionen mit Definitionsbereichen D_f und D_g.

Man definiert:

$(f+g)\colon\ D_f \cap D_g \to \mathbf{R}$
durch $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ (Summe von f und g)

$(f \cdot g)\colon\ D_f \cap D_g \to \mathbf{R}$
durch $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ (Produkt von f und g)

$\left(\dfrac{f}{g}\right)\colon\ D_f \cap (D_g \setminus \{x \in D_g \mid g(x) = 0\}) \to \mathbf{R}$
durch $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) := \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (Quotient von f und g)

$(\lambda f)\colon\ D_f \to \mathbf{R}$
durch $(\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x)$

Man spricht von **punktweiser Addition** bzw. **Multiplikation**, da diese Operationen Punkt für Punkt (im Bildbereich $\mathbf{R}$) durchgeführt werden.

Beispiel 1 Die Funktion f sei gegeben durch

$$f(x) := \sqrt{x^2 + \frac{2}{x}}.$$

Ein analysierender Blick zeigt, dass f betrachtet werden kann als zusammengesetzt aus

$$g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ g(x) := x^2, \quad h\colon \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}\,,$$
$$h(x) := \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad k\colon \mathbf{R}_0^+ \to \mathbf{R},\ k(x) := \sqrt{x}\,,$$

nämlich

$$f(x) = k(g(x) + 2h(x)) = [k \circ (g + 2h)](x)\,,$$

$D_f := \left\{ x \in \mathbf{R} \mid x \neq 0 \wedge x^2 + \dfrac{2}{x} \geq 0 \right\}$ ist der sog. **natürliche** oder **maximale Definitionsbereich** von f.

$$k \circ (g + 2h) \neq k \circ g + k \circ (2h)\,,$$

d.h., die Verkettung von Funktionen ist i.a. nicht distributiv .

Beispiel 2 Falls $D \subset \mathbf{R}$, $B \subset \mathbf{R}$ und $f\colon D \to B$ **bijektiv** ist, so gilt für den **Graph** $G_{f^{-1}}$ **der Umkehrfunktion**

$$G_{f^{-1}} = \{(y,x) \in B \times D \mid y = f(x),\ x \in D\} = \{(y,x) \mid (x,y) \in G_f\} \subset \mathbf{R}^2.$$

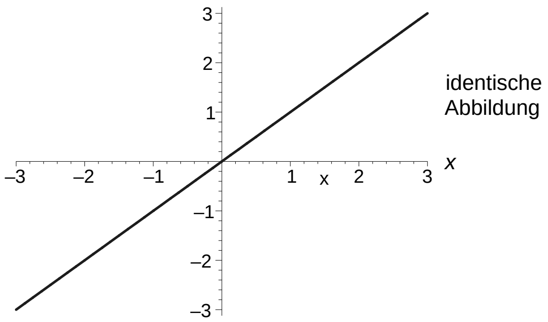
D.h., aufgrund der Vertauschung von x und y ergibt sich in der Ebene:

$G_{f^{-1}}$ entsteht aus G_f durch **Spiegelung an der Diagonalen:**

$$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = y\}$$

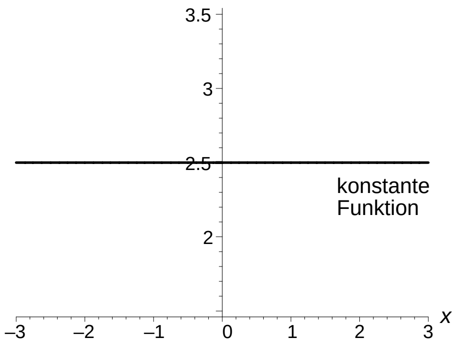
6.3 Erste elementare Funktionen

Beispiel 1



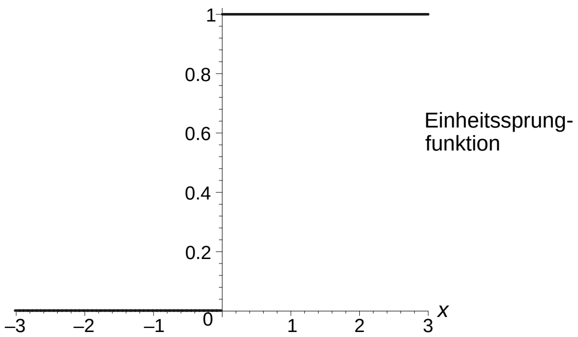
$id\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $id(x) := x$ heißt *identische Abbildung.*

Beispiel 2



$c\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \to c \in \mathbf{R}$ heißt eine *konstante Funktion.*

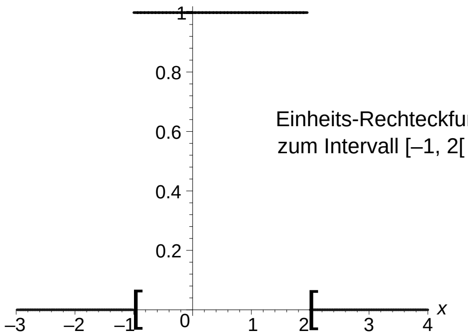
Beispiel 3



$\sigma\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definiert durch

$$\sigma(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ 1 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{heißt } \textit{Einheitssprungfunktion.}$$

Beispiel 4

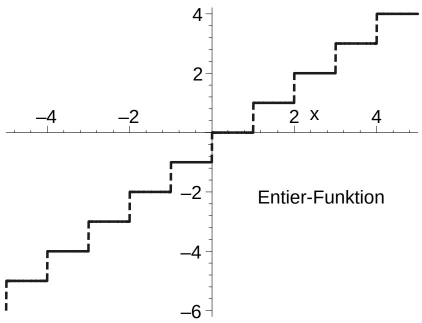


Für ein Intervall $I \subset \mathbf{R}$ heißt $\chi_I : I \to \mathbf{R}$,

$$\chi_I(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \notin I \\ 1 & \text{falls } x \in I \end{cases} \quad \textit{Einheits-Rechteckfunktion zu } I,$$

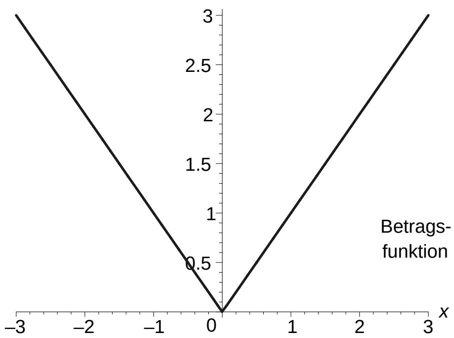
charakteristische Funktion oder Indikatorfunktion von I.

Beispiel 5



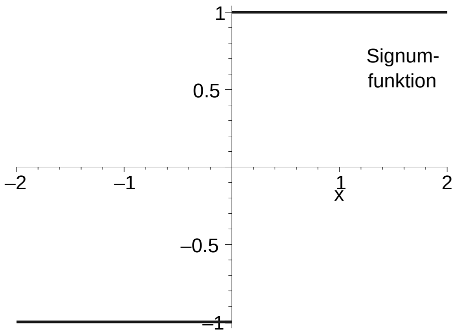
$[.]\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \to [x] := \max\{n \in \mathbf{Z} \mid n \leq x\}$ heißt *Entier-Funktion.*

Beispiel 6



$|\,.\,|\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \ x \to |x|$ heißt *Betragsfunktion.*

Beispiel 7



sgn: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definiert durch

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ +1 & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

heißt *Signum-Funktion* oder *Vorzeichenfunktion.*

Mit dieser Funktion ergibt sich für reelle Zahlen a und b:

$$a = |a| \operatorname{sgn}(a), \qquad \operatorname{sgn}(ab) = \operatorname{sgn}(a) \operatorname{sgn}(b),$$

$$\operatorname{sgn}(\frac{a}{b}) = \frac{\operatorname{sgn}(a)}{\operatorname{sgn}(b)} \quad \text{für} \quad b \neq 0 \text{ und } \operatorname{sgn}(-a) = -\operatorname{sgn}(a)$$

Beispiel 8 $P_n(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $a_n \neq 0$ definiert bekanntlich ein *Polynom* P_n *vom Grad* n.

Zwei Polynome sind gleich, wenn alle ihre Koeffizienten übereinstimmen. Insbesondere haben sie dann gleichen Grad.

$x_1 \in \mathbf{R}$ heißt eine *k-fache Nullstelle* von P_n für $k \in \mathbf{N}$, wenn $P_n(x) = (x - x_1)^k R_{n-k}(x)$ für alle $x \in \mathbf{R}$, wobei R_{n-k} ein Polynom vom Grad $(n-k)$ und $R_{n-k}(x_1) \neq 0$ ist.

Etwa ist $x_1 = -1$ eine 2-fache Nullstelle von $P_{10}(x) := x^{10} + 2x^9 + x^8 + x^2 + 2x+1$, wie man durch **Polynomdivision** bestätigt, mit $(x+1)^2 = x^2+2x+1$ erhält man:

$$\begin{array}{rl}
(x^{10} + 2x^9 + x^8 + x^2 + 2x + 1\ ) : \underbrace{(x^2 + 2x + 1)}_{(x+1)^2} = x^8 + 1 & \\
\underline{-x^{10} - 2x^9 - x^8} \qquad\qquad\qquad\qquad & \\
0 + x^2 + 2x + 1 \qquad\qquad & \\
\underline{- x^2 - 2x - 1} \qquad\qquad & \\
0 \qquad\qquad & \text{Rest } 0
\end{array}$$

Also $P_{10} = (x + 1)^2(x^8 + 1)$.

Beispiel 9 Eine Funktion f, definiert durch

$$f(x) := \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \quad P_n \text{ und } Q_m \text{ Polynome vom Grad } n \text{ bzw. } m\,,$$

heißt *Polynombruch* oder *rationale Funktion.*

Der Definitionsbereich ist $D_f = \{x \in \mathbf{R} \mid Q_m(x) \neq 0\}$.

f heißt *echter Polynombruch*, falls $n < m$ ist,
f heißt *unechter Polynombruch*, falls $n \geq m$.

Liegt ein unechter Polynombruch vor, so erhält man durch *Polynomdivision* die Darstellung

$$f(x) = G_{n-m}(x) + \frac{R_l(x)}{Q_m(x)}\,,$$

wobei

G_{n-m} ein Polynom vom Grad $n - m$ und
R_l ein Polynom vom Grad $l < m$ ist.

x_0 ist *k-fache Nullstelle* von f, falls x_0 k-fache Nullstelle von P_n und $Q_m(x_0) \neq 0$ ist.

x_1 ist *k-fache Polstelle* von f, falls x_1 k-fache Nullstelle von Q_m und $P_n(x_1) \neq 0$ ist.

x_2 ist *Definitionslücke* von f, falls $P_n(x_2) = 0 = Q_m(x_2)$ gilt.

Etwa hat die Funktion

$$f(x) := \frac{x-1}{x+2}$$

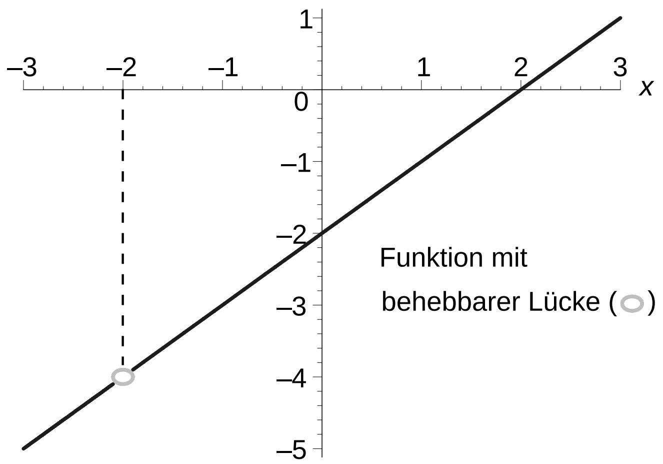
die einfache Nullstelle $x_0 = 1$ und eine einfache Polstelle bei $x_1 = -2$.

$$g(x) := \frac{x^2-4}{x+2}$$

hat den natürlichen Definitionsbereich $D_g = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, also eine Definitionslücke bei $x_2 = -2$. Wegen

$$g(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = x-2$$

für $x \neq -2$ stimmt g auf $\mathbf{R} \setminus \{-2\}$ mit der Gerade $h(x) := x-2$ überein. Man betrachtet h als *Fortsetzung* von g auf ganz $\mathbf{R}$, und spricht von $x_2 = -2$ als einer *hebbaren Lücke* von g.



6.4 Definitionen (2. Teil)

1. Für einen bezüglich $x = 0$ symmetrischen Definitionsbereich D heißt $f\colon D \to \mathbf{R}$
   gerade, wenn $f(x) = f(-x)$ für jedes $x \in D$,
   ungerade, wenn $f(-x) = -f(x)$ für jedes $x \in D$ ist.

2. Für $D = \mathbf{R}$ heißt f **periodisch**, wenn es ein $p > 0$ gibt, so daß $f(x+p) = f(x)$ für jedes $x \in \mathbf{R}$. p heißt dann eine **Periode** von f.

3. Zu jeder auf einem halboffenen Intervall I der Länge $L > 0$ definierten Funktion $f\colon I \to \mathbf{R}$ gibt es eine **L-periodische Fortsetzung**

   $$\tilde{f}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R} : \tilde{f}(x) := f(x) \text{ für } x \in I$$

und $\tilde{f}(z) := f(x)$ für $z \in \mathbf{R}$ mit $z = x + kL$, $k \in \mathbf{Z}$, $x \in I$.

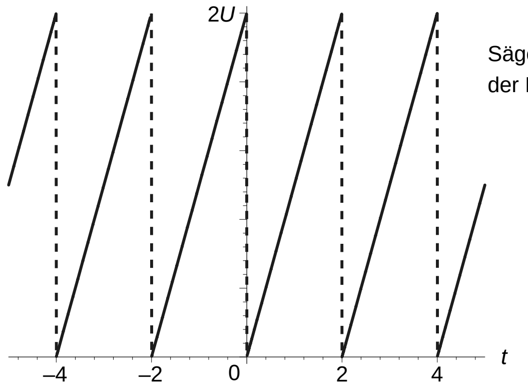
$\tilde{f}$ hat dann die Periode L.

Beispiel 1 $f(x) := x^2$ definiert eine gerade Funktion,
$g(x) := x^3$ definiert eine ungerade Funktion auf $\mathbf{R}$

Beispiel 2 $u(t) := Ut$ für $0 \leq t < 2$, $U \in \mathbf{R}$, hat die 2-periodische Fortsetzung

$$\tilde{u}(s) = u(t) \quad \text{für} \quad s = t + 2k,\ k \in \mathbf{Z},\ 0 \leq t < 2\,.$$

Die kleinste Periodenlänge heißt *primitive Periode*. Hier ist sie gleich 2.



Sägezahn-Funktion der Periodenlänge 2

Wie man sieht, ist $u(t)$ natürlich auch 4- oder 6-periodisch.

6.5 Definitionen (3. Teil)

1. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbf{R}$ heißt **nach oben beschränkt** (bzw. nach unten beschränkt), wenn es ein $k \in \mathbf{R}$ gibt, so dass $f(x) \leq k$ (bzw. $f(x) \geq k$) für alle $x \in D$, m.a.W. wenn der Wertebereich von f nach oben (bzw. nach unten) beschränkt ist.

   Ist f sowohl nach unten als auch nach oben beschränkt, so heißt f **beschränkt**.

2. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}$, heißt in einem Intervall $I \subset D$ **monoton wachsend** (bzw. streng monoton wachsend), falls mit $x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2$ auch $f(x_1) \leq f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) < f(x_2)$) gilt. Entsprechend definiert man (streng) monoton fallend.

Beispiel 1 $f(x) := x^2$ für $x \in \mathbf{R}$ definiert eine nach unten z.B. durch $k = 0$ beschränkte, nach oben unbeschränkte Funktion.

$g(x) := \dfrac{1}{1+x^2} - 1$ für $x \in \mathbf{R}$ definiert eine beschränkte Funktion, und zwar ist $k_1 = -1$ eine untere, $k_2 = 0$ eine obere Schranke für f.

Es gilt sogar $\sup\limits_{x \in \mathbf{R}} g(x) = 0$ und $\inf\limits_{x \in \mathbf{R}} g(x) = -1$.

Beispiel 2 $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$, ist streng monoton fallend auf $\mathbf{R}_0^-$ und streng monoton wachsend auf $\mathbf{R}_0^+$.
$g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = x^3$ ist auf ganz $\mathbf{R}$ streng monoton wachsend.

6.6 Umkehrbarkeit streng monotoner Funktionen

Ist $f\colon I \to \mathbf{R}$ auf einem Intervall I **streng monoton** (wachsend oder fallend), so folgt sofort, dass f **injektiv** ist. Beschränkt man den Bildbereich auf den Wertebereich W_f von f, so erhält man eine bijektive Abbildung. Hierzu gibt es eine **Umkehrfunktion**, die wir wieder mit $f^{-1}\colon W_f \to I$ bezeichnen.

f^{-1} hat dasselbe Monotonieverhalten wie f: Sei etwa f streng monoton wachsend;

$$y_1, y_2 \in W_f, \quad y_1 < y_2$$

und die Annahme $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$ hätte den Widerspruch zur Folge

$$f(f^{-1}(y_1)) = y_1 \geq y_2 = f(f^{-1}(y_2))\,.$$

Deshalb gilt $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$; somit ist f^{-1} ebenso streng monoton wachsend.

Beispiel 1 $f\colon \mathbf{R}_0^+ \to \mathbf{R}_0^+$, $f(x) = x^2$ ist streng monoton wachsend. Die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon \mathbf{R}_0^+ \to \mathbf{R}_0^+$ ist die Wurzelfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

$g\colon \mathbf{R}_0^- \to \mathbf{R}_0^+$, $g(x) = x^2$ ist streng monoton fallend. Die Umkehrfunktion zu diesem Teil der Quadratfunktion ergibt sich aus

$$\begin{array}{rcl} x < 0 & \overrightarrow{g} & x^2 = y \\ -\sqrt{y} = -|x| & \overleftarrow{g^{-1}} & y = x^2 \end{array}$$

Also $g^{-1}(x) = -\sqrt{x}$, wenn wir die Funktionsvariable wie üblich wieder mit x bezeichnen.

Die Quadratfunktion, auf ganz $\mathbf{R}$ definiert, ist nicht injektiv, besitzt daher keine Umkehrfunktion.

Die Bedeutung von Umkehrabbildungen zeigt sich beim **Lösen von Gleichungen**. Gleichungen lassen sich in der Regel durch Abbildungen beschreiben.

Beispiel 2 Gesucht ist $x \in \mathbf{R}$, so dass $2x + 5 = y$, wobei $y \in \mathbf{R}$ gegeben ist. Mit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x + 5$ läßt sich die **Gleichung durch** $f(x) = y$ **beschreiben**.

Es gibt eine Lösung der Gleichung genau dann, wenn y im Wertebereich von f liegt. Lösen der Gleichung heißt gerade, einen Urbildpunkt x für $y = f(x)$ zu suchen. Besitzt f eine Umkehrabbildung f^{-1}, so liefert $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$ direkt die gesuchte Lösung.

Auflösen einer Gleichung nach der Unbekannten heißt also gerade Anwenden der Umkehrabbildung auf beide Seiten der Gleichung.

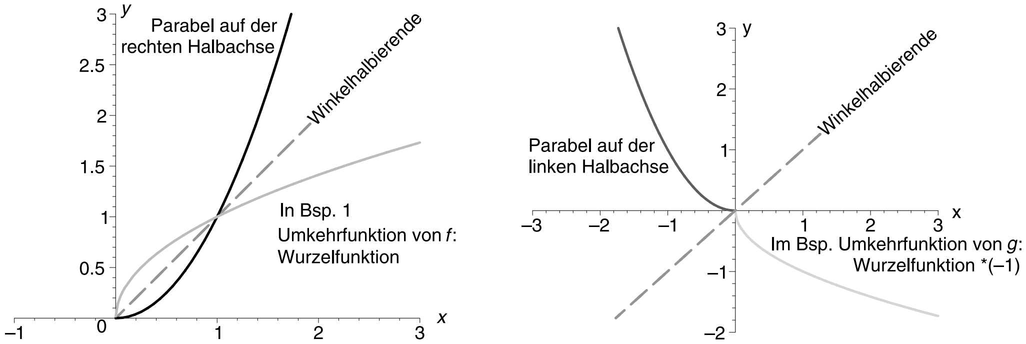
Äquivalent liefert rechnerisches Auflösen der Gleichung $f(x) = y$ nach x (wenn dies möglich ist) gerade auch die Funktionsvorschrift für f^{-1}. Hier

$$2x + 5 = y \iff x = \frac{y-5}{2}$$

Also

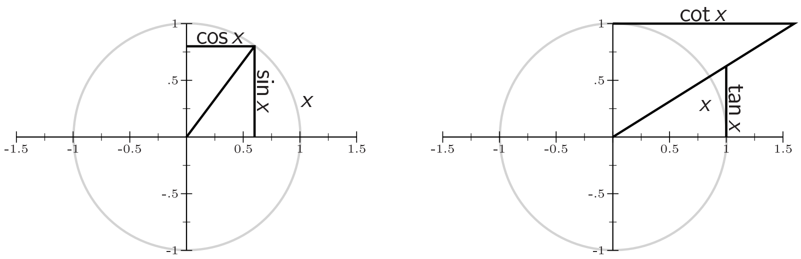
$$
\begin{aligned}
f^{-1}\colon y &\longrightarrow \frac{y-5}{2}\\
x &\longrightarrow \frac{x-5}{2}\\
f^{-1}(y) &= f^{-1}\left(f(x)\right) = f^{-1}(2x+5) = \frac{(2x+5)-5}{2} = x
\end{aligned}
$$

Hat man einmal f^{-1} berechnet, so läßt sich die Gleichung $f(x) = y$ für jede rechte Seite y sofort lösen durch Abbildung von y mit f^{-1}. Dieses Prinzip werden wir auch bei Gleichungssystemen mit mehreren Unbekannten wiederfinden, denn es eröffnet einen Zugang zu jeder Art von Gleichungen der Form $f(x) = y$, auch wenn x und y andere Objekte als Zahlen, etwa Vektoren im $\mathbf{R}^n$, sind.



6.7 Trigonometrische Funktionen

Durch die „geometrische Definition“ der trigonometrischen Funktionen entnehmen wir eine ganze Reihe elementarer Fakten über die Winkelfunktionen sin und cos den folgenden Abbildungen:



1. Bei einem Winkel von

   90° zwischen dem Zeiger-Vektor $\vec{r}$ und der Polarachse ist $\cos(x) = 0$.

   Diese Nullstelle x_0 der cos-Funktion wird $x_0 = \frac{1}{2}\pi$ getauft.

   Für den Zusammenhang zwischen dem *Bogenmaß* x eines Winkels ϕ am Einheitskreis und dem Winkel-Gradmaß ϕ° setzt man

   $$x := \pi \frac{\phi^\circ}{180^\circ}\,.$$

2. Man vereinbart, dass

   x wächst (fällt),
   wenn der Zeiger $\vec{r}$ entgegen (mit) dem Uhrzeigersinn läuft.

Läßt man diesen Zeiger immer weiterlaufen, so wird jedes $x \in \mathbf{R}$ erreicht, d.h., $\cos(x)$ und $\sin(x)$ sind auf ganz $\mathbf{R}$ definierbare Funktionen.

3. $\cos$ ist auf $[0, \pi]$ streng monoton fallend, mit $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$.

   $\sin$ ist auf $\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$ streng monoton wachsend,
   mit $\sin\left(\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]\right) = [-1, 1]$.

   Beide Funktionen sind 2π-periodisch, sin ist eine ungerade, cos eine gerade Funktion.

   Es gilt für alle $x \in \mathbf{R}$, dass $|\cos(x)| \leq 1$ und $|\sin(x)| \leq 1$.

4. Für reelle Zahlen x und y gelten:

   $$\begin{aligned} &\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 && \text{(Satz von Pythagoras)} \\ &\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) && \\ &\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) && \text{(Additionstheoreme)} \end{aligned}$$

   Diese Eigenschaften sind später im Studium mit Hilfe komplexer Zahlen einfach einzusehen.

5. Man kann elementargeometrisch einige spezielle Werte berechnen:

x	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$
$\sin(x)$	0	1	0	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\cos(x)$	1	0	-1	0	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$

   und gewinnt aus den Additionstheoremen die Beziehungen

   $$\begin{aligned} &\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \quad \text{und} \\ &\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

   Nullstellen der trigonometrischen Funktionen:

   $$\begin{aligned} \cos(x) = 0 &\iff x \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \\ \sin(x) = 0 &\iff x \in \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \end{aligned}$$

6. Man definiert die Tangens- und Cotangens-Funktionen durch

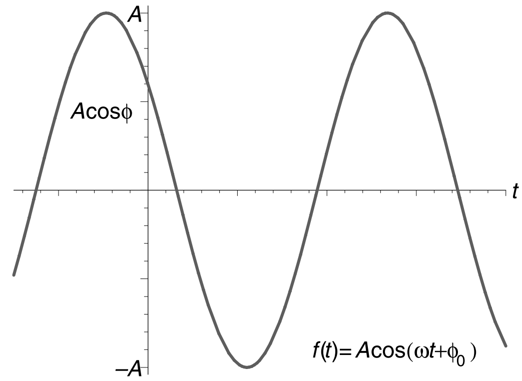
   $$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \text{ mit Definitionsbereich } D_{\tan} = \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$$
   $$\cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \text{ mit Definitionsbereich } D_{\cot} = \mathbf{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$$

   $\tan$ ist auf $\left]-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right[$ streng monoton wachsend,
   mit $\tan\left(\left]-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right[\right) = \mathbf{R}$

cot ist auf $]0,\pi[$ streng monoton fallend mit $\cot(]0,\pi[) = \mathbf{R}$.

7. Aufgrund ihrer Periodizität sind die Winkelfunktionen vorzüglich geeignet, periodische Schwingungen zu beschreiben:

   Die „Zeitfunktion" $f(t) = A\cos(\omega t + \phi_0)$, $t \geq 0$, $A > 0$, $\omega > 0$, $\phi_0 \in [0, 2\pi[$ bzw. $\phi_0 \in\,]-\pi, \pi]$ beschreibt die Auslenkung einer *harmonischen Schwingung* mit *Amplitude* A, *Nullphasenwinkel* ϕ_0, *Kreisfrequenz* ω und *Periode* $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.



6.8 Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

Die auf das Intervall $\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$ eingeschränkte Sinusfunktion

$$\sin_{|[-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi]}\ \left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right] \to [-1, 1]$$

ist **bijektiv**.

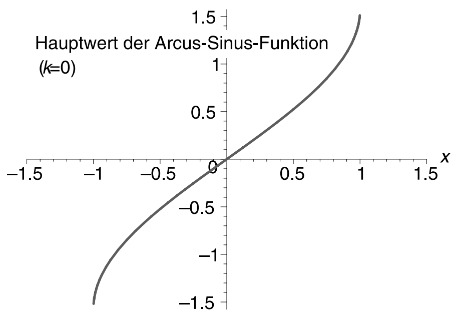
Die Umkehrfunktion heißt **Arcus-Sinus-Funktion**

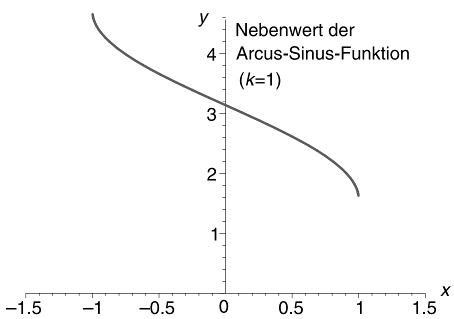
$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right].$$

Da auch die Einschränkungen $\sin_{|[(2k-1)\frac{1}{2}\pi,(2k+1)\frac{1}{2}\pi]}$ bijektiv sind für jedes $k \in \mathbf{Z}$, existieren auch zu diesen Restriktionen der Sinusfunktion Umkehrfunktionen. Man bezeichnet sie entsprechend mit

$$\arcsin_k : [-1, 1] \to \left[(2k-1)\frac{1}{2}\pi, (2k+1)\frac{1}{2}\pi\right].$$

Für $k = 0$ spricht man vom **Hauptwert** des arcsin.





Entsprechend sind

$$\arccos_k : [-1,1] \to [k\pi, (k+1)\pi]$$

die Umkehrfunktionen zu jeweils

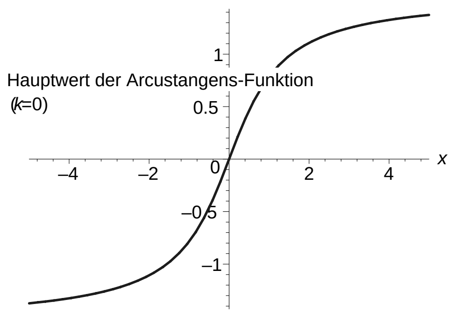
$$\cos_{|[k\pi,(k+1)\pi]}\,, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Und schließlich analog

$$\arctan_k\colon \mathbf{R} \to \left](2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right[$$
$$\operatorname{arccot}_k\colon \mathbf{R} \to]k\pi, (k+1)\pi[$$

die Umkehrabbildungen der bijektiven Restriktionen der Tangens- bzw. Cotangens-Funktion auf die Intervalle

$$\left](2k-1)\frac{1}{2}\pi, (2k+1)\frac{1}{2}\pi\right[\quad \text{bzw.} \quad]k\pi, (k+1)\pi[\,.$$



Bemerkungen

1. Gewöhnlich vereinbart man eine Winkelkonvention durch $\phi \in]-\pi, \pi]$ oder $\phi \in [0, 2\pi[$ bei der Berechnung von Bogenlängen mit den Arcusfunktionen (z.B. auch auf Taschenrechnern), d.h. man rechnet mit den Hauptwerten ($k = 0$).

2. Wie für die trigonometrischen Funktionen gibt es auch zwischen den Arcusfunktionen eine Reihe von Beziehungen untereinander; wir erwähnen etwa: $\operatorname{arccot}(x) = \frac{1}{2}\pi - \arctan(x)$ für $x \in \mathbf{R}$ und $\arcsin(x) = \dfrac{1}{2}\,\pi - \arccos(x) = \arctan \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ für $x \neq \pm 1$

6.9 Polarkoordinaten

In einem (rechtwinkligen) kartesischen Koordinatensystem läßt sich jeder Punkt P der Ebene durch einen Ortsvektor

$$\vec{r} = (x, y)$$

beschreiben.

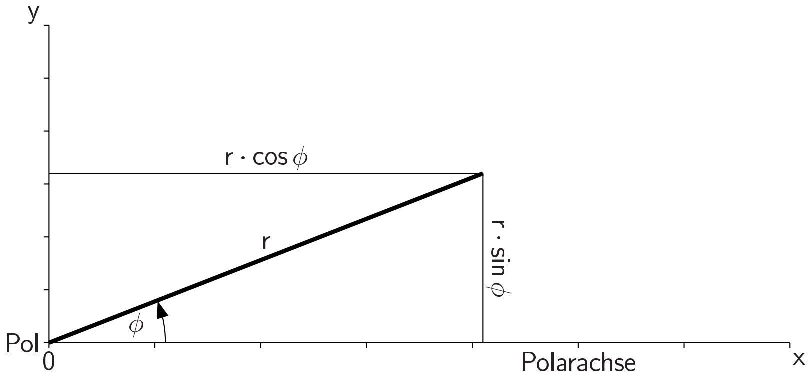
$$\cos(\phi) = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{für } r \neq 0$$
$$x = r\cos(\phi) \qquad \phi \in]-\pi, \pi] \quad \text{bzw.} \quad \phi \in [0, 2\pi[$$

Ebenso ist dieser Punkt eindeutig zu lokalisieren durch Angabe seines Abstandes r vom Ursprung des Koordinaten-Systems und des Winkels ϕ, den der Ortsvektor mit der positiven x-Achse einschließt, wenn $r > 0$. Diese

Beschreibung von P durch (r, ϕ) nennen wir seine Angabe in **Polarkoordinaten**.

Der Ursprung ist wie üblich als sog. **Pol** gewählt und erhält die Polarkoordinaten $(0, 0)$. Die positive x-Achse ist als sog. **Polarachse** des Polarkoordinaten-Systems gewählt. Man könnte natürlich auch eine andere Halbachse als Polarachse wählen, von der aus die Winkel berechnet werden.

Die Definition der Winkelfunktionen zeigt nun, dass sich mit ihnen sofort zwischen kartesischen und Polarkoordinaten umrechnen läßt:



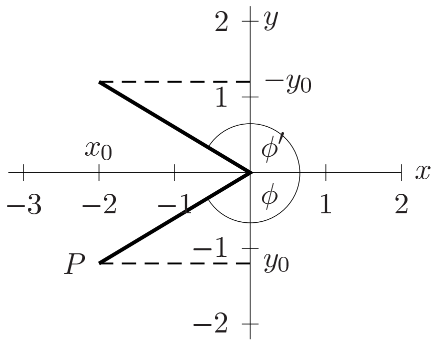
$$x = r\cos(\phi) \quad \text{und} \quad y = r\sin(\phi)$$

zur Umrechnung von gegebenen Polarkoordinaten (r, ϕ) in kartesische Koordinaten, sowie bei gegebenen kartesischen Koordinaten $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad \phi = \begin{cases} \arccos\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{falls } y \geq 0 \\ -\arccos\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{falls } y < 0 \end{cases}$$

Die Fallunterscheidung zur Berechnung von ϕ liegt in der Benutzung des Hauptwertes von arccos. Man muß beachten, in welcher Halbebene der gegebene Punkt liegt!

$$\arccos\left(\frac{x_0}{r_0}\right) \quad \text{liefert} \quad \phi' \quad (\text{da Wertebereich von } \arccos_{k=0} = [0, \pi])$$



P hat also die Polarkoordinaten

$r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$

$\phi = -\arccos\left(\dfrac{x_0}{r}\right)$

Den Übergang zwischen verschiedenen Koordinatensystemen nennt man eine **Koordinatentransformation**. Wir verwenden Polarkoordinaten in zwei einfachen Beispielen, die zeigen, daß durch eine Koordinatentransformation **derselbe Sachverhalt unterschiedlich dargestellt** werden kann.

Beispiel 1 Ein Punkt bewege sich auf einem „Leitstrahl" mit konstanter Geschwindigkeit $a\omega$ mit $a > 0,\ \omega > 0$, vom Ursprung weg, in dem er sich zur Zeit $t = 0$ befinde. Gleichzeitig soll sich der Leitstrahl mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um den Ursprung drehen. Wir setzen also für $t \geq 0$

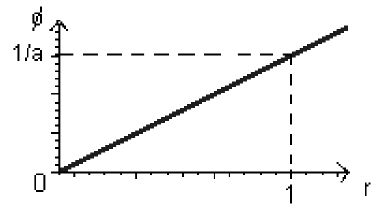
$$r(t) := a\omega t \quad \text{(beschreibt die Radialbewegung auf dem Leitstrahl)}$$
$$\phi(t) := \omega t \quad \text{(beschreibt die Rotationsbewegung)}$$

Der Ort des Punktes in der Ebene zur Zeit $t \geq 0$ ist daher in Polarkoordinaten gegeben durch

$$(r(t), \phi(t)) = (a\omega t, \omega t)$$

Zu jeder Zeit t gilt $\phi(t) = \dfrac{1}{a}\, r(t)$,
d.h., für die Polarkoordinaten (r, ϕ) unseres Punktes gilt stets: $\phi = \dfrac{r}{a}$

Die Darstellung dieses Zusammenhangs in einem rechtwinkligen (r, ϕ)-Achsenkreuz für $r \geq 0$ und $\phi \geq 0$ ergibt eine **Halbgerade**.



Diese Darstellung zeigt graphisch auf einfache Weise die Proportionalität von

Radialgeschwindigkeit $\dfrac{dr}{dt} = a\omega$

und Winkelgeschwindigkeit $\dfrac{d\phi}{dt} = \omega.$

$\dfrac{\frac{d\phi}{dt}}{\frac{dr}{dt}} = \dfrac{1}{a}$ Steigung der Halbgeraden

Wir sehen, dass zwischen r und ϕ der funktionale Zusammenhang

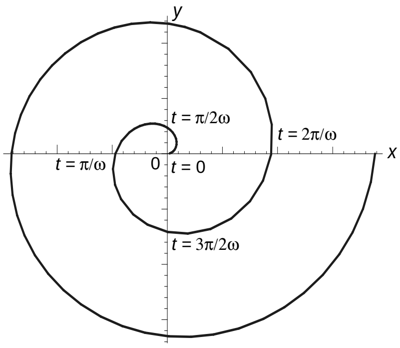
$$\phi = \phi(r) = \frac{1}{a} r$$

besteht. Damit läßt sich aus gegebenem Abstand r des Punktes zu einer Zeit t sofort der aktuelle Winkel $\phi = \dfrac{r}{a}$ des Leitstrahls gegenüber der Polarachse (bei $t = 0$) angeben.

Stellen wir dagegen diese Bewegung in einem rechtwinkligen, kartesischen (x, y)-Koordinatensystem dar durch

$$(x(t), y(t)) = (r(t)\cos(\phi(t)), r(t)\sin(\phi(t))) = (a\omega t\cos(\omega t), a\omega t\sin(\omega t))$$

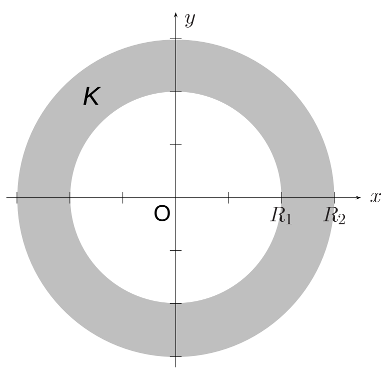
für $t \geq 0$, so ergibt sich in einer entsprechenden graphischen Darstellung eine **Archimedische Spirale**.



Dies ist kein Funktionsgraph; die y-Koordinate läßt sich nicht als Funktion der x-Koordinate darstellen. Auch die Proportionalität zwischen Radial- und Winkelgeschwindigkeit ist dieser Darstellung nicht so schnell anzusehen wie der Darstellung der Bewegung durch eine Halbgerade mittels Polarkoordinaten. Dies zeigt, dass wir die Freiheit der Wahl zwischen unterschiedlichen Darstellungen zu Vereinfachungen nutzen können, manche Sachverhalte in einer geschickt gewählten Darstellung eventuell einfach erkennen können, die wir in einer anderen Darstellung vielleicht garnicht entdecken.

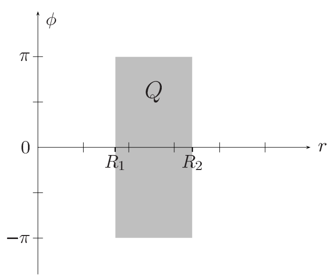
Beispiel 2 Wir betrachten die Menge M aller Punkte der Ebene, die von einem fest gegebenen Punkt P_0 einen Abstand r zwischen R_1 und R_2 besitzen; es gelte $0 < R_1 \leq r \leq R_2, \quad R_1 < R_2$.
Wählt man zur Darstellung von M ein kartesisches (x, y)-Koordinatensystem mit Ursprung P_0, so läßt sich M **darstellen als Kreisring K** um den Ursprung:

$K := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid R_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq R_2^2\}$



Wir besitzen aber auch die Freiheit, diese Menge **in Polarkoordinaten darzustellen durch**:

$Q := \{(r, \phi) \mid R_1 \leq r \leq R_2 \text{ und } -\pi < \phi \leq \pi\}$



Solche Darstellungen von Flächenstücken, die bezüglich kartesischer (x, y)-Koordinaten rotationssymmetrisch sind, als Rechtecke bezüglich Polarkoordinaten werden wir vereinfachend benutzen können, wenn wir in der Integralrechnung ihren Flächeninhalt definieren und bestimmen.

Mathematisch gesehen sind beide Darstellungen äquivalent in folgendem Sinn: Durch

$$T : Q \longrightarrow K$$
$$(r, \phi) \longrightarrow T(r, \phi) := (r\cos(\phi), r\sin(\phi))$$

ist eine **bijektive Abbildung** definiert, die jedem Punkt aus Q genau einen Punkt in K zuordnet. T beschreibt gerade die Koordinatentransformation zwischen Polarkoordinaten und kartesischen Koordinaten.

6.10 Kurztest zum Abschnitt reelle Funktionen

1. (a) Was heißt, eine Funktion ist injektiv?
   (b) Was heißt, eine Funktion ist surjektiv?
   (c) Was heißt, eine Funktion ist bijektiv?
   (d) Was heißt, eine Funktion ist monoton wachsend?
   (e) Was heißt, eine Funktion ist beschränkt?

   Geben Sie zu jeder der genannten Eigenschaften eine Funktion an, welche die Eigenschaft hat, und eine Funktion, welche die Eigenschaft nicht hat.

2. Wie lautet die Umkehrfunktion zu

   $$f(x) = 3x^2 - 2, \quad (x \geq 0)?$$

3. Wie lauten die Bedingungen an eine Funktion f und ihren Wertebereich, damit die Gleichung $f(x) = y$ eindeutig lösbar ist?

4. Ein Punkt in der Ebene besitze die kartesischen Koordinaten x und y. Wie berechnet man daraus seine Polarkoordinaten r und ϕ?

5. Gegeben ist die Schwingung $f(t) = A\sin(\omega t + \phi)$. Wenn man f in der Form $f(t) = B\cos(\nu t + \psi)$ schreibt, wie lauten dann B, ν, ψ?

6. Wie lauten die Additionstheoreme für $\cos(x + y)$ und $\sin(x + y)$?

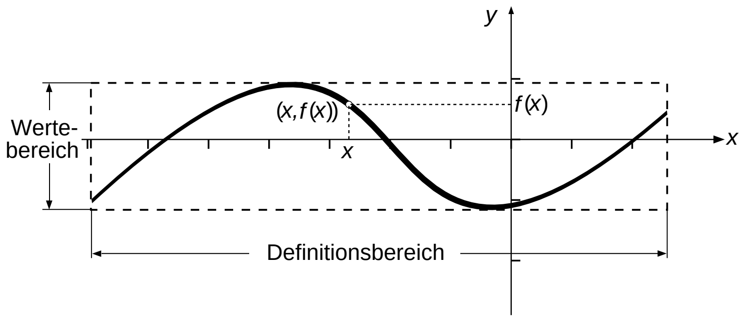
7. Fassen Sie zusammen:

   $$\cos(2t + 1) + \sin(2t + 2) = A\sin(\omega t + \phi)$$

   Wie lauten A, ω und ϕ?

6.11 Formelsammlung für reelle Funktionen (Teil 1)

Graph einer Funktion:



gerade Funktion $f(x) = f(-x)$ (Symmetrie zur y-Achse)
ungerade Funktion $f(x) = -f(-x)$ (Symmetrie zum Ursprung (0, 0))

Funktionstypen

Lineare Funktionen (Gerade)	$f(x) = mx + b$	
	$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	(2-Punkte-Form)
	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	(Achsenabschnittsform)
	z. B. $f(x) = c$	konstante Funktion
Potenzfunktionen	$f(x) = x^a$	
$a = \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}$	z. B. $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$	Wurzelfunktionen
Polynome	$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots a_nx^n$	
	$y = a_0 + a_1x + a_2x^2$	Parabel
Rationale Funktionen	$y = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots b_mx^m}$	
Exponentialfunktion	$a^x,\ a > 0$	$0 < a < 1$ monoton fallend
	z. B. $y = e^x$	$a > 1$ monoton steigend
Logarithmusfunktion	$y = \log_a(x)$	(Umkehrfunktion der Exponentialfkt. a^x)
	$y = \log_{10}(x) = \lg(x)$	dekadischer Logarithmus
	$y = \log_e(x) = \ln(x)$	natürlicher Logarithmus
Trigonometrische Fkt.	$\sin(x), \cos(x), \tan(x), \cot(x)$	
Arcus-Funktionen	$\arcsin(x), \arccos(x), \ldots$	(Umkehrfunktion der Trigonometrischen Fkt.
Hyperbel-Funktionen	$\sinh(x), \cosh(x), \ldots$	
Area-Funktionen	$\operatorname{arsinh}(x), \operatorname{arcosh}(x), \ldots$	(Umkehrfunktion der Hyperbel-Fkt.)

	$f(x) = e^x$	Funktion wird	
a)	$f(x) = e^x + c$	... verschoben um c in positiver y- Richtung	für $c > 0$
b)	$f(x) = \|e^x - c\|$	... verschoben um c in negativer y- Richtung	für $c > 0$
		und alle negativen y- Werte an der x-Achse gespiegelt	
c)	$f(x) = e^{(x+c)}$	... verschoben um c in negativer x- Richtung	für $c > 0$
d)	$f(x) = e^{-x}$	... gespiegelt an y-Achse	
e)	$f(x) = -e^x$	... gespiegelt an x-Achse	
f)	$f(x) = -e^{-x}$	... gespiegelt am Ursprung	
g)	$f^{-1}(x) = \ln x$	... gespiegelt an der 1. Winkelhalbierenden	

6.12 Formelsammlung für reelle Funktionen (Teil 2)

Potenz- und Logarithmusgesetze

$a^3 = a^2 \cdot a = a \cdot a \cdot a$

$a^0 = 1$ $\qquad$ $\log_a 1 = 0$

$a^1 = a$ $\qquad$ $\log_a a = 1$

$(1^a = 1)$

$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

$a^n = a^{n-1} \cdot a$

$a^x a^y = a^{x+y}$ $\qquad$ $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $\qquad$ $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$

$(a^x)^y = a^{xy}$ $\qquad$ $\log_a(x^y) = y \log_a x$

$a^x b^x = (ab)^x$

$a^x = e^{x \ln a}$

$\sqrt[b]{a} = a^{\frac{1}{b}}$

$\sqrt[b]{a^x} = (\sqrt[b]{a})^x = a^{\frac{x}{b}}$

$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

6.13 Formelsammlung für reelle Funktionen (Teil 3)

Trigonometrie

Zusammenhang zwischen Gradmaß (ϕ^0) und Bogenmaß (x):

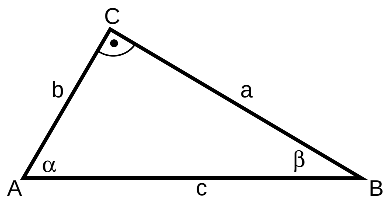
$$\frac{x}{\pi} = \frac{\phi^0}{180^0}$$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ϕ^0	0^0	45^0	90^0	135^0	180^0	270^0	360^0

Trigonometrische Funktionen

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin(x) & x \in \mathbf{R} \\ f(x) = \cos(x) & x \in \mathbf{R} \\ f(x) = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} & x \in \mathbf{R} \backslash \{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\} \\ f(x) = \cot(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} = \dfrac{1}{\tan(x)} & x \in \mathbf{R} \backslash \{k\pi, k \in \mathbf{Z}\} \end{array}$$

Berechnung am rechtwinkligen Dreieck:



$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \tan\alpha = \frac{a}{b}, \quad \cot\alpha = \frac{b}{a}$$

Berechnung in einem beliebigen Dreieck:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} \quad \text{Sinussatz}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad \text{Kosinussatz}$$

Wertetabelle

x	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$
$\sin(x)$	0	1	0	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\cos(x)$	1	0	-1	0	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$

$\cos(x \pm 2\pi) = \cos(x)$	periodische Funktion
$\sin(x \pm 2\pi) = \sin(x)$	
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$	
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$	
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$	
$\cos(-x) = \cos(x)$	gerade Funktion
$\sin(-x) = -\sin(x)$	ungerade Funktion
$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$	„trigonometrischer Pythagoras“
$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$	Additionstheorem
$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$	Additionstheorem
$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$	

1) $f(t) = A_1 \sin(\omega t) + A_2 \cos(\omega t) = A \sin(\omega t + \phi)$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \quad \tan(\phi) = \frac{A_2}{A_1}$$

2) $a\cos(\omega t + \phi_1) + b\sin(\omega t + \phi_2) = A\sin(\omega t + \phi) \quad \text{mit} A \geq 0, \phi \in \,]-\pi, \pi]$ mit

$$A = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\sin(\phi_2 - \phi_1)}$$

$$\phi = \operatorname{sgn}(a\cos(\phi_1) + b\sin(\phi_2)) \arccos\left(\frac{b\cos(\phi_2) - a\sin(\phi_1)}{A}\right)$$

3) $A_1\sin(\omega t + \phi_1) + A_2\sin(\omega t + \phi_2) + A_3\sin(\omega t + \phi_3) \ldots = A\sin(\omega t + \phi)$ mit

$$A^2 = (A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_2) + \ldots)^2 + (A_1\sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_2) + \ldots)^2$$

$$\phi = \operatorname{sgn}(A_1\sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_2) + \ldots) \arccos\left(\frac{A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_2) + \ldots}{A}\right)$$

Polarkoordinaten

Polar	$\rightarrow$	Kartesisch	$x = r\cos(\phi)$
			$y = r\sin(\phi)$
Kartesisch	$\rightarrow$	Polar	$\phi = \pm \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$
		Fallunterscheidung:	$+$ für $y \geq 0$, $-$ für $y < 0$
			$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

6.14 Aufgaben (Lösungen im Anhang)

Aufgabe 1 Man skizziere folgende Funktionen und untersuche ihre Eigenschaften:

a) $f(x) = -1$

b) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$

c) $f(x) = -x^2 - 2x + 12$

d) $f(x) = x^3 - 7x$

e) $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{3x^2 + 1}$

Aufgabe 2 Vereinfachen Sie:

a) $\left((-2)^3\right)^{-2}$

b) $\left((-2)^{-3}\right)^3$

c) $\left((-2)^6 - (-2^6)\right) : \left(-2^{3^2} - (2^2)^3\right)$

d) $(-2x^n)^4 - \left((-2x)^4\right)^n$

e) $\left(\frac{3x^2}{4y^3} - \frac{6x^3}{5y^2} + \frac{2x^4}{3y^2}\right) : \frac{3x^3}{2y^2}$

f) $\frac{x^k - y^k}{x^k + y^k} + \frac{x^k + y^k}{x^k - y^k}$

g) $\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{8x^6y^3}}$

h) $\sqrt[n]{x^{n+2}y^{2n-1}}$

i) $\frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

Aufgabe 3 Schreiben Sie mit e- und ln-Funktion:

a) aq^x

b) $\sqrt{x}^{\sqrt{x}}$

Aufgabe 4 Skizzieren Sie die folgende Funktion:

$$f(x) = 0,5^{-(x-1)}$$

Aufgabe 5 Skizzieren Sie den Graphen von

$$g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad g(x) = |x - [x + 1/2]|$$

([.] steht hier für Entierfunktion)

Aufgabe 6 Führen Sie die Polynomdivision

$$(2x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 4x + 1) : (x^2 - 3x + 1)$$

durch.

Aufgabe 7 Finden Sie jeweils die Umkehrfunktion und skizzieren Sie alle Funktionen:

a) $g(y) = \sqrt{2y + 2}, \quad (y > -1)$

b) $x(t) = \dfrac{t-3}{t+2}, \quad (t \neq -2)$

Aufgabe 8 Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

$$\cos\left(-\frac{31\pi}{4}\right)$$

Aufgabe 9 Lösen Sie folgende Gleichung für x:

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = -0,5 \quad \text{mit} \quad x \in \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right]$$

Aufgabe 10 Lösen Sie die Gleichungen:

a) $0,8\sin(x) - 0,7\cos(x+1) = 0$

b) $\sin^2(x) - 3\cos(2x) - \cos(x) = -3, \qquad \text{mit} \quad x \in [0, 2\pi[$

Aufgabe 11 Ein Strom $i(t)$ sei durch Überlagerung sinusförmiger Schwingungen in der Form

$$i(t) = 2A\sin(\omega t) + 2,5A\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) - 4A\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

gegeben. Stellen Sie $i(t)$ in der Form

$$i(t) = \hat{\imath}\sin(\omega t + \phi)$$

dar.

Aufgabe 12 Wie lauten die Polarkoordinaten (r, ϕ) mit $r \geq 0, -\pi < \phi \leq \pi$ der Punkte mit den kartesischen Koordinaten

$$(2,1); \quad (-2,1); \quad (2,-1); \quad (-2,-1)$$

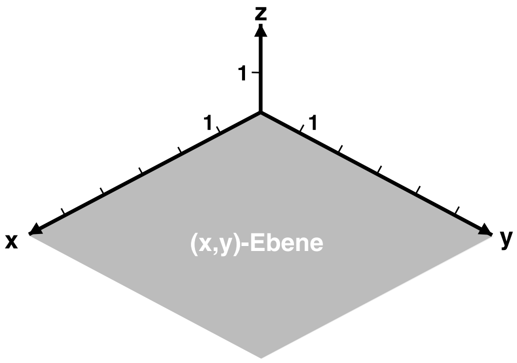
Benutzen Sie Ihren Taschenrechner zur Umrechnung.

7 Vektorrechnung

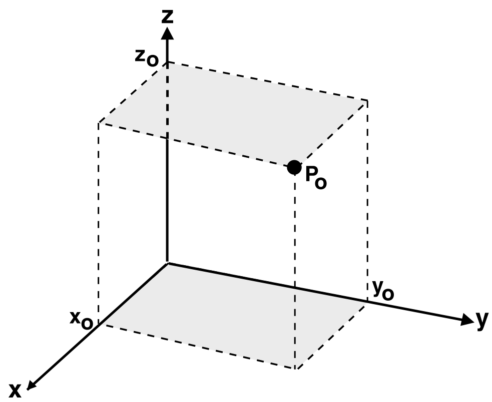
In diesem Abschnitt werden einige Grundbegriffe über Vektoren in Erinnerung gebracht. Vektoren im 3-dimensionalen Raum haben Sie etwa in der Physik zur Besprechung von Kräften sicher schon kennengelernt. Im folgenden wiederholen wir kurz grundlegende Operationen mit Vektoren im Raum wie Addition, Streckung, Skalarprodukt und Vektorprodukt und zeigen einige Anwendungsmöglichkeiten. Wir folgen dabei weitgehend der Darstellung des Buches **Höhere Mathematik 1** von **K. Meyberg** und **P. Vachenauer**, das wir Studienanfängern in Ingenieurdisziplinen als Mathematikbuch sehr empfehlen können.

7.1 Kartesische Koordinatensysteme im Raum

Kartesische Koordinatensysteme im Raum bestehen aus 3 Zahlengeraden mit gleichen Längeneinheiten, die sich rechtwinklig im jeweiligen Nullpunkt schneiden. Dieser Schnittpunkt wird als **Nullpunkt** oder **Ursprung** bezeichnet.



Kartesisches Koordinatensystem im Raum



Ein Punkt P_O im Raum und seine Koordinaten x_O, y_O, z_O

Die derart entstehenden **Achsen des Koordinatensystems** werden oft als x-, y- und z-Achsen bezeichnet. Sie bilden ein sogenanntes **Rechtssystem**, wenn die Drehung der positiven x-Achse um 90° in die positive y-Achse und die Verschiebung in Richtung der positiven z-Achse zusammen eine Rechtsschraube darstellen. Durch je zwei Achsen wird eine Ebene aufgespannt. Die so entstehenden 3 Ebenen heißen **Koordinatenebenen**: Die (x, y)-Ebene, die (y, z)-Ebene und die (x, z)-Ebene.

Die **Koordinaten** x_0, y_0, z_0 eines Punktes P_0 enthält man aus den Schnittpunkten der Achsen mit den 3 Ebenen durch P_0, die parallel zu den Koordinatenebenen liegen. Zu jedem Punkt P des Raumes $\mathbf{R}^3$ gibt es genau ein Koordinatentripel – und umgekehrt: Jedem Koordinatentripel $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ entspricht genau ein Punkt des Raumes.Der 3-dimensionale Raum wird daher durch das kartesische Produkt $\mathbf{R}^3$ beschrieben.

7.2 Vektoren

Viele Dinge des täglichen Lebens lassen sich durch eine einzige Zahl quantifizieren, z. B. der Preis einer Ware, die Länge einer Strecke, die Masse eines Steins. Zur Beschreibung einer **Kraft**, die man benötigt, um eine Masse vom Punkt A zum Punkt B zu bewegen, reicht eine einzige Zahl nicht aus; denn neben der Stärke, die diese Kraft besitzen muss, ist auch die Richtung von A nach B, in der die Kraft zu wirken hat, von Wichtigkeit. Schließlich muss ausgedrückt werden, dass die Kraft die Masse von A nach B und nicht etwa von B nach A bewegt.

Um diese drei Charakteristika auszudrücken, stellt man eine Kraft durch einen **Vektor**, was soviel bedeutet wie „Träger", dar, den man mit

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \mathbf{a}$$

dargestellt (man stelle sich vor, der Vektor „trägt" A nach B). Dabei ist die Länge des Vektors proportional zur Stärke der Kraft, die Lage des Vektors gibt die Richtung und die Vektorspitze den Richtungssinn der Kraftwirkung an.

Notation In vielen Büchern – und auch hier – werden zur Bezeichnung von Vektoren auch fett gedruckte Buchstaben verwendet, wie oben **a**, statt Pfeile über Buchstaben zu editieren.

Wird unter der Parallelverschiebung **a** des Raumes, die A nach B bringt, ein anderer Punkt, etwa P nach Q verschoben, dann hat offenbar der dazugehörige Vektor **p** dieselbe Wirkung wie **a**, d. h.,

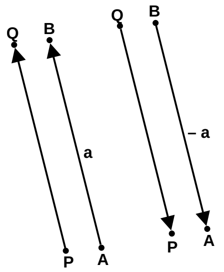
$$\mathbf{p} = \overrightarrow{\mathbf{PQ}} = \overrightarrow{\mathbf{AB}} = \mathbf{a}$$

Zwei gleich lange und gleich gerichtete Pfeile stellen somit denselben Vektor dar.

Statt zu sagen „**a** repräsentiert einen Vektor“, sagt man kurz „**a** ist einen Vektor“ und beachtet, dass **a** im Raum frei parallel verschoben werden kann und nicht an einen festen Ausgangspunkt gebunden ist.

Den zu **a** entgegengesetzt gerichteten Vektor nennt man $-\mathbf{a}$. Er macht die durch **a** bewirkte Parallelverschiebung (des Raumes) rückgängig:

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{\mathbf{AB}} = \overrightarrow{\mathbf{PQ}} \quad \text{und} \quad -\mathbf{a} = \overrightarrow{\mathbf{BA}} = \overrightarrow{\mathbf{QP}}$$



Der Nullvektor **O** bezeichnet die Parallelverschiebung die gar nichts bewegt:

$$\mathbf{O} = \overrightarrow{\mathbf{AA}} = \overrightarrow{\mathbf{PP}}$$

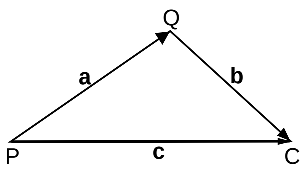
für jeden Punkt A oder P.

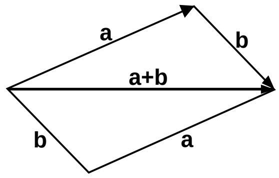
7.3 Die Addition und Subtraktion von Vektoren

Man versteht unter der Summe

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

die Parallelverschiebung, die durch Hintereinanderausführung der Verschiebungen **a** und **b** entsteht. Haben **a** und **b** gleichen Anfangspunkt, so gewinnt man den Summenvektor **c** geometrisch nach der Parallelogrammregel.





Es gelten folgende Rechenregeln:

$\mathbf{a} + \mathbf{O} = \mathbf{a}$ und $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{O}$

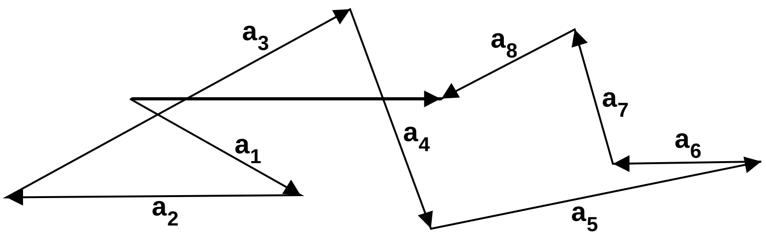
$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ Kommutativgesetz

$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ Assoziativgesetz

Sie Summe der Vektorkette

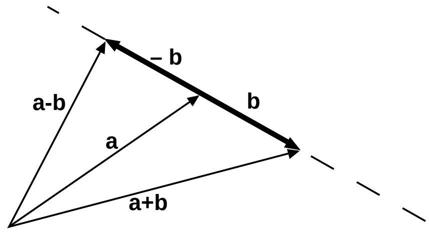
$$\mathbf{a_1} + \mathbf{a_2} + \mathbf{a_3} + \ldots + \mathbf{a_n}$$

ist der Vektor **c**, der vom Anfangspunkt zum Endpunkt der gebildeten Vektorkette geht.



Die Differenz von Vektoren wird erklärt durch

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})\,.$$



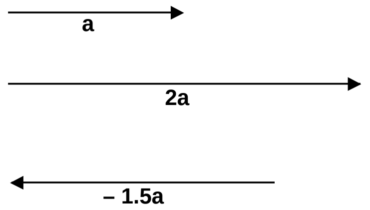
7.4 Skalare Vielfache, Streckung von Vektoren

Für eine reelle Zahl r ≥ 0 und eine Vektor **a** ist $r\mathbf{a}$ der um den Faktor r „gestreckte“ Vektor. Für $r > 0$ wird **a** verlängert oder gestreckt, für $r < 1$ verkürzt oder gestaucht. Bei Vektoren **a**, die eine Kraft repräsentieren, ist $r\mathbf{a}$ die um den Faktor r verstärkte bzw. verminderte Kraft.

Für $r < 0$ definiert man $r\mathbf{a}$ durch

$$r\mathbf{a} = -(|r|\mathbf{a}),$$

d. h., zur Streckung mit dem Faktor $|r|$ kommt noch eine Richtungsumkehr hinzu.



Sonderfälle dieser Definition sind

$$0\mathbf{a} = \mathbf{O} \quad \text{und} \quad r\mathbf{O} = \mathbf{O}$$

für jedes $r \in \mathbf{R}$ und jeden Vektor $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^3$.

Es gelten folgende Rechenregeln, die Sie selbst nachprüfen und testen können:

$$\begin{array}{rcl} r(s\mathbf{a}) & = & (rs)\mathbf{a} \\ r(\mathbf{a}+\mathbf{b}) & = & (r\mathbf{a}+r\mathbf{b}) \\ (r+s)\mathbf{a} & = & (r\mathbf{a}+s\mathbf{a}) \qquad \text{mit } r, s \in \mathbf{R} \text{ und } \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ Vektoren im } \mathbf{R}^3. \end{array}$$

7.5 Die Norm eines Vektors

Die Norm $|\mathbf{a}|$ eines Vektors $\mathbf{a}$ mit Anfangspunkt A und Endpunkt B ist die **Länge** der Strecke von A nach B.

Übliche Schreibweisen sind auch

$$|\mathbf{a}| = ||\mathbf{a}|| = |\overrightarrow{\mathbf{AB}}|,$$

und statt **Norm** von $\mathbf{a}$ ist auch der Begriff **Betrag** von $\mathbf{a}$ in Gebrauch.

Ist etwa $\mathbf{a}$ ein Kraftvektor, dann ist die Norm $|\mathbf{a}|$ der Betrag der Kraft.

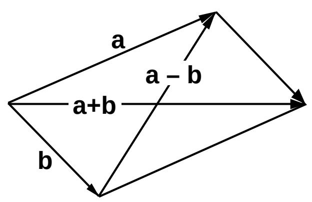
Der Nullvektor $\mathbf{O}$ hat keine positive Länge, d. h., $|\mathbf{O}| = 0$.

Es gelten

$$|r\mathbf{a}| = |r||\mathbf{a}| \quad \text{für alle } r \in \mathbf{R}, \mathbf{a} \in \mathbf{R}^3$$

und die Dreiecksungleichung:

$$|\mathbf{a} \pm \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \quad \text{für alle } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^3\,.$$



Ein Vektor der Norm 1 heißt **Einheitsvektor**. Zu jedem Vektor $\mathbf{a} \neq \mathbf{O}$ ist

$$\mathbf{a_0} := \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

der Einheitsvektor in Richtung $\mathbf{a}$.

7.6 Koordinaten

Gegeben ist ein kartesisches Koordinatensystem mit dem Ursprung **O**. Dadurch werden gleichzeitig 3 ausgezeichnete Einheitsvektoren $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ (oft auch $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ oder $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$) gegeben in Richtung der positiven x-, y-, bzw. z-Achse. Wir nennen diese Vektoren eine kartesische Basis. Der Vektor

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{\mathbf{OA}} \quad \text{heißt } \textbf{Ortsvektor} \text{ des Punktes } A = (a_1, a_2, a_3).$$

Er wird repräsentiert durch einen Pfeil vom Ursprung zum Punkt A. Er ist eindeutig darstellbar als Summe

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e_1} + a_2\mathbf{e_2} + a_3\mathbf{e_3}\,.$$

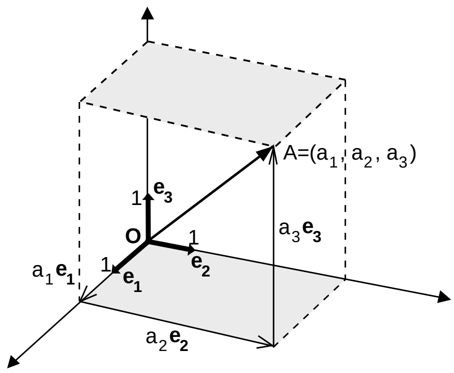
Abkürzend schreibt man

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\mathbf{e_1} + a_2\mathbf{e_2} + a_3\mathbf{e_3} = \overrightarrow{\mathbf{OA}} \quad \text{mit} \quad A = (a_1, a_2, a_3)$$

Man nennt $a_i\mathbf{e_i}$ die Komponenten von $\mathbf{a}$ in $\mathbf{e_i}$-Richtung ($i = 1, 2, 3$) und die Zahlen $a_i \in \mathbf{R}$ die **Komponenten** oder **Koordinaten** des Vektors $\mathbf{a}$ (vgl. 7.1).

Die Einheitsvektoren lauten in Koordinatendarstellung

$$\mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Für die Addition und das skalare Vielfache eines Vektors ergibt sich die Koordinatendarstellung:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

und

$$\mu\mathbf{a} = \mu \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu a_1 \\ \mu a_2 \\ \mu a_3 \end{pmatrix} \qquad (\mu \in \mathbf{R})$$

oder anders ausgedrückt:

$$\text{Für } \mathbf{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i\mathbf{e_i}, \quad \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{3} b_i\mathbf{e_i}$$

erhält man für $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^3$ und $\mu \in \mathbf{R}$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{3} (a_i + b_i)\mathbf{e_i} \quad \text{und} \quad \mu\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{3} (\mu a_i)\mathbf{e_i} \,.$$

Mit dem Satz des Pythagoras ergibt sich die Formel für die Norm eines Vektors

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} : \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

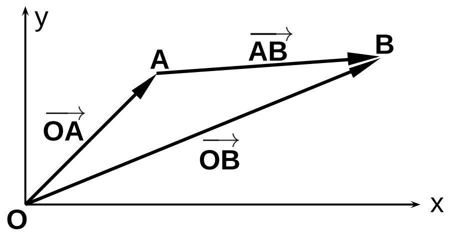
Für den Abstand der Punkte $P = (p_1, p_2, p_3)$ und $Q = (q_1, q_2, q_3)$ erhält man somit

$$|\overrightarrow{\mathbf{PQ}}| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$$

Betrachtet man nur Punkte in der (x, y)-Ebene, so ist die z-Komponente gleich Null und man kann sie für Problemstellungen innerhalb der (x, y)-Ebene dann weglassen.

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \overrightarrow{\mathbf{OB}} - \overrightarrow{\mathbf{OA}} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{\mathbf{AB}}| = |\overrightarrow{\mathbf{OB}} - \overrightarrow{\mathbf{OA}}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$



7.7 Das Skalarprodukt oder innere Produkt

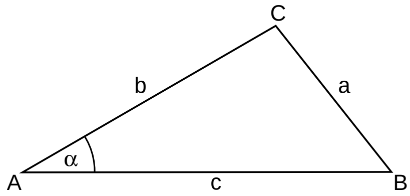
Das **Skalarprodukt** oder **innere Produkt** zweier Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$, die miteinander den Winkel $\alpha \in [0, \pi]$ einschließen, ist eine Zahl. Sie wird definiert durch:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos(\alpha), \alpha \in [0, \pi]$$

Die Rechenregeln für das Skalarprodukt lauten:

1.)	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$	Kommutativgesetz
2.)	$(\mu\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mu(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\mu\mathbf{b})$	für $\mu \in \mathbf{R}$
3.)	$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$	Distributivgesetz
4.)	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}$ orthogonal zu $\mathbf{b}$	Orthogonalitätstest
5.)	$\lvert\mathbf{a}\rvert = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})^{1/2}$	

Für Dreiecke ABC läßt sich mit den Bezeichnungen im nachfolgenden Bild der **Cosinussatz** zeigen:



$$\overrightarrow{\mathbf{BC}} = \overrightarrow{\mathbf{AC}} - \overrightarrow{\mathbf{AB}} \quad \text{und} \quad \alpha = \angle(\overrightarrow{\mathbf{AB}}, \overrightarrow{\mathbf{AC}})\,.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} a^2 &= |\overrightarrow{\mathbf{BC}}|^2 = |\overrightarrow{\mathbf{AC}} - \overrightarrow{\mathbf{AB}}|^2 = |\overrightarrow{\mathbf{AC}}|^2 + |\overrightarrow{\mathbf{AB}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathbf{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{AC}} \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)\,. \end{aligned}$$

Die Koordinatendarstellung von Ortsvektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ bezüglich einer kartesischen Basis $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ ermöglicht eine einfache Berechnung des Skalarprodukts:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Prüfen Sie dies nach mit den Regeln 1.) bis 5.) von oben bitte nach. Der Cosinus des Winkels $\alpha \in [0, \pi]$ zwischen zwei Vektoren $\mathbf{a} \neq \mathbf{O}$ und $\mathbf{b} \neq \mathbf{O}$

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Ein Ortsvektor $\mathbf{a}$ schließt mit den Basisvektoren $\mathbf{e}_i$ den Winkel α_i ein. Für den Winkel α_i gilt

$$\cos(\alpha_i) = \cos\angle(\mathbf{a}, \mathbf{e}_i) = \frac{a_i}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \qquad i = 1, 2, 3$$

Man nennt $\cos(\alpha_i)$ **Richtungscosinus** des Vektors $\mathbf{a}$ zum Basisvektor $\mathbf{e}_i$.

In der Physik werden homogene, d. h. vom Ort unabhängige Kräfte als Vektoren dargestellt. Wird ein Massenpunkt unter einer solchen Kraft $\mathbf{K}$ vom Punkt P zum Punkt Q verschoben, so ist die geleistete **Arbeit** definiert als

$$A = \mathbf{K} \cdot \mathbf{s} = |\mathbf{K}||\mathbf{s}|\cos\angle(\mathbf{K}, \mathbf{s}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{s} = \overrightarrow{\mathbf{PQ}}\,.$$

$$\left(\text{Kraftkomponente } \frac{\mathbf{K} \cdot \mathbf{s}}{|\mathbf{s}|^2}\mathbf{s} \;\text{ in Wegrichtung } \cdot \text{ Weg } \mathbf{s} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{s}\right)$$

Von physikalischem Interesse ist also insbesondere die orthogonale Zerlegung von $\mathbf{K}$ längs $\mathbf{s}$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K_s} + \mathbf{K_n}$$

mit der Kraftkomponente $\mathbf{K_s}$ in Richtung $\mathbf{s}$ und der zu $\mathbf{s}$ senkrechten Komponente $\mathbf{K_n}$, da $\mathbf{K_n}$ keinen Beitrag zur Arbeit leistet, wie man oben sieht: $\mathbf{K_n} \cdot \mathbf{s} = 0$.

Es gilt allgemein für die orthogologe Zerlegung von $\mathbf{a}$ längs $\mathbf{b}$ $(\mathbf{b} \neq \mathbf{O})$:

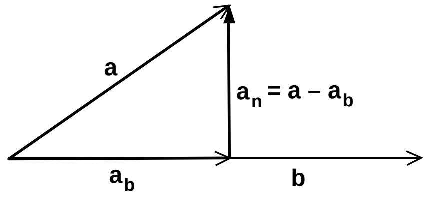
$$\mathbf{a} = \mathbf{a_b} + \mathbf{a_n}$$

mit

$$\mathbf{a_b} = \left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\right)\mathbf{b} \qquad \text{(Orthogonalprojektion von } \mathbf{a} \text{ auf } \mathbf{b}\text{)}$$

und

$$\mathbf{a_n} = \mathbf{a} - \left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\right)\mathbf{b} \qquad \text{(orthogonal zu } \mathbf{b}\text{).}$$



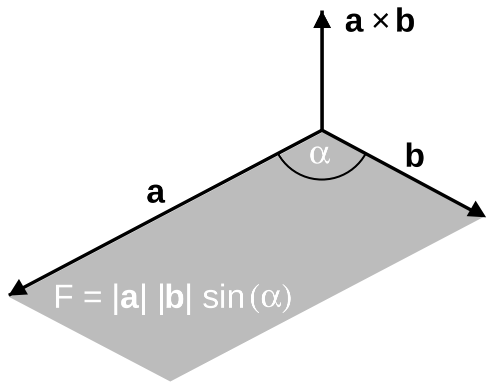
7.8 Vektorprodukt

Das Vektorprodukt $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ zweier Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ ist der Vektor, der

1.) zu $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ orthogonal ist,

2.) zusammen mit $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ ein Rechtssystem $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ bildet (Rechte-Hand-Regel) und

3.) die Norm $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\alpha)$ hat, wobei α der von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ gebildete Winkel $\alpha \in [0,\pi]$ ist.



Aus dieser Definition ergeben sich unmittelbar die folgenden Regeln für Vektorprodukte:

1.)	$\mu(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\mu\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \mathbf{a}\times(\mu\mathbf{b})$	für $\mu \in \mathbf{R}$
2.)	$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{O}$	falls $\mathbf{a} = \mathbf{O}$ oder $\mathbf{b} = \mathbf{O}$ oder $\mathbf{a}\|\mathbf{b}$ (Parallelitätstest)
3.)	$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$	Das Vektorprodukt ist nicht kommutativ, sondern antikommutativ
4.)	$\mathbf{a}\times\mathbf{a} = \mathbf{O}$	
5.)	$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$	Distributivgesetz
6.)	$\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|$	ist Flächeninhalt des von den Ortsvektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannten Parallelogramms

7.) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$

In Komponentenschreibweise gilt für Ortsvektoren in einem das kartesischen Koordinatensystem:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Hier noch eine wichtige Formel, die man durch Nachrechnen bestätigen kann:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

d. h., $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ liegt in der Ebene, die von $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ aufgespannt wird. Damit kann man z. B. die orthogonale Komponente zu $\mathbf{b}$ von $\mathbf{a} = \mathbf{a_b} + \mathbf{a_n}$ auch mit der Formel

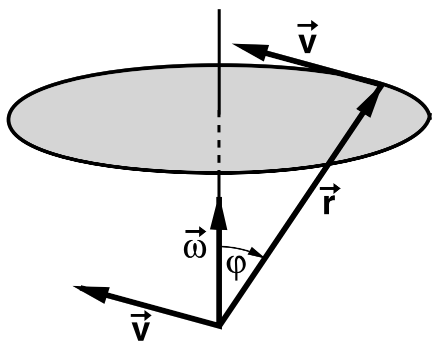
$$\mathbf{a_n} = \frac{(\mathbf{b} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}))}{|\mathbf{b}|^2}$$

berechnen.

Beispiel 1 Winkelgeschwindigkeit:
Wir betrachten eine Scheibe, die mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine Achse rotiert. Die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$, mit der sich die Scheibe dreht, ist gegeben durch den Betrag $|\boldsymbol{\omega}|$ (rad/s) und ihre Richtung, die in Richtung der Rotationsachse weist.

Die Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ in jedem Punkt P der Scheibe steht senkrecht sowohl auf der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ als auch auf dem zu P gehörigen Ortsvektor $\mathbf{r}$ (= Vektor vom Nullpunkt auf der Drehachse zum Punkt P). Für jeden Punkt der Scheibe ist der Betrag der Geschwindigkeit:

$$|\mathbf{v}| = |\mathbf{r}|\,|\boldsymbol{\omega}|\sin\varphi$$



Damit ist

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

(Man beachte, dass $\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}, \mathbf{v}$ ein Rechtssystem bilden.)

Beispiel 2 Drehmoment:
Auf einen starren Körper wirkt im Abstand $|\mathbf{r}|$ von der Drehachse die Kraft $\mathbf{F}$. Diese erzeugt ein Drehmoment

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}\,.$$

Man beachte, dass eine Kraft in Richtung von $\mathbf{r}$ kein Drehmoment erzeugt.

Beispiel 3 Lorentz-Kraft:
Eine bewegte elektrische Ladung erfährt im Magnetfeld eine Ablenkung. Die Kraft, die auf eine mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ bewegte elektrische Ladung Q im homogenen Magnetfeld $\mathbf{B}$ wirkt, ist

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

7.9 Das Spatprodukt

Eine Kombination aus Skalarprodukt und Vektorprodukt ist das aus je drei Vektoren gebildete **Spatprodukt**

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

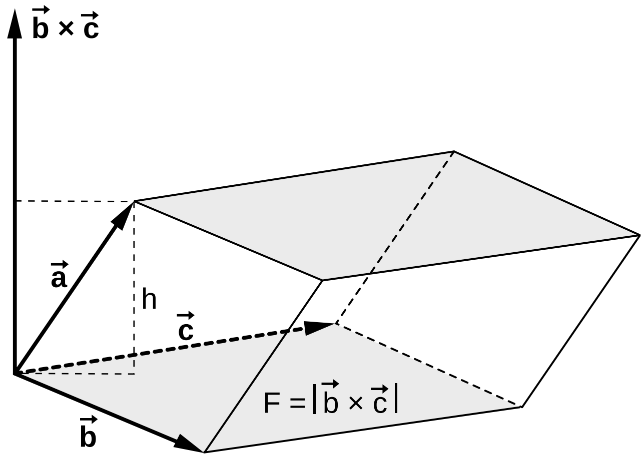
Satz Der von den Ortsvektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ aufgespannte Spat (auch Parallelflach oder Parallelepiped genannt) hat das Volumen

$$V = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]|$$

Beweis Die Grundfläche mit den Kanten $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ hat den Flächeninhalt $F = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}|$ (nach der Definition des Vektorproduktes). Die Höhe h des Spats bezüglich dieser Grundfläche beträgt $h = |\mathbf{a}_{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}|$ mit der Komponente von $\mathbf{a}$ in Richtung des auf der Grundfläche senkrecht stehenden Vektors $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$. Mit der orthogonalen Zerlegung ergibt sich für

$$h = \left| \frac{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}{|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|^2} (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \right| = \left| \frac{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}{|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|} \right|$$

und damit $V = F \cdot h = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$.



Das Prinzip von **B. Cavalieri (1598 – 1647)** sagt allgemeiner:

Räumliche Körper, die in jeder Höhe die gleiche Querschnittsfläche besitzen, haben das gleiche Volumen.

Denken Sie etwa an das Volumen eines schräg verschobenen Kartenstapels beim Pokern. Für Parallelepipede ist dieses Prinzip also oben bewiesen.

Für die Komponentendarstellung in kartesischen Koordinaten erhält man

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

Für Leser, die in der Schule schon Determinanten kennengelernt haben, sei bemerkt, dass man das Spatprodukt auch schnell berechnen kann durch

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix},$$

wie Sie durch einen Vergleich mit obigem Ergebnis schnell feststellen werden.

Aus dem obigen Satz ergeben sich einige interessante Folgerungen:

1.) Test für lineare Unabhängigkeit:

Die Vektoren $\mathbf{a} \neq 0, \mathbf{b} \neq 0, \mathbf{c} \neq 0$ sind nicht parallel zu einer Geraden oder Ebene (man sagt, sie sind linear unabhängig) $\Leftrightarrow [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] \neq 0$

2.) Test für Rechtssystem:

$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ ist ein Rechtssystem $\Leftrightarrow [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] > 0$

7.10 Kurztest zum Abschnitt Vektoren

1. Wie ist üblicherweise die Norm (Länge) eines Vektors im Raum definiert?

   Was ist also die Norm von $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$?

2. Wie berechnet man die Orthogonalprojektion des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ auf die Gerade durch den Nullpunkt und den Punkt $(1, 0, 1)$ im Raum? Wie lautet sie?

3. Berechnen Sie mit Hilfe des Vektorprodukts den Flächeninhalt des Dreiecks durch die Punkte $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$ und $(0, 1, 0)$. Die Längeneinheiten auf den Koordinatenachsen sind dabei Meter m.

4. Wie lautet das Volumen des Spats, der durch die 3 Vektoren

   $$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   aufgespannt wird?

5. Gegeben seien die 2 Punkte $(1, 1, 1)$ und $(2, 0, 3)$ im Raum. Wie lautet die Gerade durch diese Punkte in vektorieller Form

   $$\mathbf{g}(t) = \mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2, \quad (t \in \mathbf{R})\,?$$

7.11 Aufgaben (Lösungen im Anhang)

Aufgabe 1 Für

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

berechne man

a) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ b) $5\mathbf{a}$ c) $2\mathbf{a}-3\mathbf{b}$

d) $|\mathbf{a}|$ e) $|\mathbf{b}|$ f) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$

Aufgabe 2 Bezüglich einer kartesischen Basis seien

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}2\\-4\\0\end{pmatrix},\mathbf{b}=\begin{pmatrix}6\\3\\4\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad\mathbf{c}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

a) Welche Winkel schließen die Vektoren ein?
b) Berechnen Sie die Winkel von $\mathbf{b}$ mit der x-, y-, und z-Achse.

Aufgabe 3 Wie lautet die orthogonale Zerlegung von

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}=\mathbf{a_b}+\mathbf{a_n}$$

mit $\mathbf{a_b}$ parallel zu $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ und $\mathbf{a_n}$ orthogonal zu $\mathbf{b}$?

Aufgabe 4 Gegeben seien

$$\mathbf{F}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\quad\mathbf{F}_2=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad\mathbf{F}_3=\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$$

a) Man bestimme alle Ortsvektoren, die auf $\mathbf{F}_1$ senkrecht stehen.
b) Man gebe alle Ortsvektoren (komponentenweise) an, die auf $\mathbf{F}_1$ und auf $(\mathbf{F}_2\times\mathbf{F}_3)$ senkrecht stehen.

Aufgabe 5 Wie groß ist das Volumen des Parallelepipedes, aufgespannt durch die Ortsvektoren

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\quad\mathbf{b}=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad\mathbf{c}=\begin{pmatrix}2\\4\\8\end{pmatrix}$$

in einem kartesischen Koordinatensystem?
(Alle Komponenten beziehen sich auf m als Längeneinheit.)

8 Elemente aus der Kombinatorik

8.1 Die Lehre vom Zählen

Die Kombinatorik ist die Lehre vom Zählen. Abzuzählen ist dabei in mathematischen Modellen meist die Anzahl der Elemente gewisser endlicher Mengen mit gegebenen Eigenschaften. Gerade in modernen Teilgebieten der Ingenieurdisziplinen – besonders in der **Informatik** mit Codierungstheorie, statistischen Fragestellungen, Graphentheorie, Kryptologie usw. – spielen kombinatorische Überlegungen eine grundlegende Rolle. Solche Überlegungen sind häufig alles andere als einfach, d.h., sie erfordern eingehende Beschäftigung und geduldige Übung.

Wir haben in den folgenden Abschnitten einige der grundlegenden Tatsachen über „das Abzählen" zusammengestellt, wie sie heute oft schon in der Schule behandelt werden.

Wir empfehlen die Auseinandersetzung mit diesem Stoff – auch unter Hinzuziehung von Schulbüchern zum Thema – insbesondere Studienkandidaten im Fach Informatik, in dem kombinatorische Elemente von Anfang an eine große Rolle spielen. Wir legen dabei allen Lesern auch noch einmal den Abschnitt 4 über **Summen und Produkte** ans Herz, denn zum „Kombinieren" gehört natürlich auch solides Grundwissen über Summen und Produktbildungen.

8.2 Zählprinzip

Das erste einfache Zählprinzip lautet wie folgt:
Wenn n endliche Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ gegeben sind und jeweils A_i m_i Elemente hat ($m_i \in \mathbf{N}, i = 1, 2, \ldots, n$), dann hat das kartesische Produkt $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ genau

$$p = m_1 \cdot m_2 \cdots m_n = \prod_{i=1}^{n} m_i$$

Elemente.

Der Beweis des Zählprinzips mit vollständiger Induktion:

1. Für $n = 1$ hat A_1 natürlich m_1 Elemente

2. Wenn zu den Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eine weitere Menge A_{n+1} mit m_{n+1} Elementen hinzukommt, dann kann man aus jedem n-Tupel des kartesischen Produkts $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ auf m_{n+1} Arten ein $(n+1)$-Tupel des kartesischen Produkts $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \times A_{n+1}$ machen. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es dann also

   $$m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n \cdot m_{n+1}$$

   solche Elemente von $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \times A_{n+1}$.

Beispiel 1 $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{a, b\}$, $A_3 = \{A, B, C\}$

$A_1 \times A_2 = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$; $|A_1 \times A_2| = 4$

$A_1 \times A_2 \times A_3$ hat die Elemente (vgl. 2. Argument im Beweis des Zählprinzips)

$$\begin{array}{lll} (1, a, A) & (1, a, B) & (1, a, C) \\ (1, b, A) & (1, b, B) & (1, b, C) \\ (2, a, A) & (2, a, B) & (2, a, C) \\ (2, b, A) & (2, b, B) & (2, b, C) \end{array}$$

Insgesamt hat also $A_1 \times A_2 \times A_3 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ Elemente.

Anwendungen des Zählprinzip finden Sie in den folgenden Abschnitten.

8.3 Permutationen

Verschiedene Elemente

Frage Wie viele Anordnungen von n verschiedenen Elementen einer Menge gibt es?

Beispiel Wir betrachten die Menge A mit den Elementen $1, a, B$. Es gibt folgende 6 Anordnungen:

$$(1, a, B) \quad (1, B, a) \quad (a, 1, B) \quad (a, B, 1) \quad (B, 1, a) \quad (B, a, 1)$$

Die 3 Elemente lassen sich auf $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ Arten anordnen. Jede solche Anordnung heißt auch eine **Permutation** (lat./engl.: Vertauschung) der Elemente.

Allgemein gilt als Antwort auf die 1. Frage:

Die Anzahl der Permutationen von n verschiedenen Elementen einer Menge beträgt $n!$

Beweis mit dem Zählprinzip
Man betrachte eine n-elementige Menge M und bilde die Menge aller Permutationen von Elementen aus M

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in M, x_2 \in M \setminus \{x_1\}, x_3 \in M \setminus \{x_1, x_2\}, \ldots, \\ \ldots, x_n \in M \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}\}$$

Für die erste Komponente x_1 gibt es n Wahlmöglichkeiten in M, für die zweite Komponente x_2 gibt es $n-1$ Wahlmöglichkeiten in $M \setminus \{x_1\}$ u.s.w.; für die letzte Komponente x_n gibt es 1 Wahlmöglichkeit in $M \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$.

Insgesamt gibt es also $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$ Möglichkeiten, die n Elemente anzuordnen. (Man vergleiche gegebenfalls den Abschnitt über Fakultäten.)

Wörteranzahl

Frage Gegeben sind jetzt n Buchstaben, die **nicht** unbedingt verschieden sein müssen. Wie viele verschiedene „Wörter“ lassen sich damit bilden?

Mathematisch gesprochen: Wie viele Permutationen von n Elementen gibt es, wenn die Elemente in k Klassen mit jeweils gleichen Elementen eingeteilt werden können und die k-te Klasse n_k gleiche Elemente enthält? Es gilt dann also $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = n$.

Beispiel 1 Gegeben sind die 4 Buchstaben OOTT. Wir sehen 2 Klassen mit je 2 Elementen. Es gibt folgende Permutationen/„Wörter“:

OOTT
OTOT
OTTO
TOTO
TTOO
TOOT

Hätten wir die Buchstaben unterschieden, etwa geschrieben $O_1O_2T_1T_2$, gäbe es wie im Abschnitt vorher $4! = 24$ Anordnungen. Da wir sie nicht unterscheiden, fallen nun gleiche Wörter wie z. B. $O_1T_1T_2O_2$, $O_2T_1T_2O_1$, $O_1T_2T_1O_2$, $O_2T_2T_1O_1$ „in einen Topf“. Wir müssen also $4! = 24$ dividieren durch die Zahl der Permutationen gleicher Elemente/Buchstaben, hier 2! Buchstaben O und 2! Buchstaben T.

Ergebnis Es gibt

$$\frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{4} = 6$$

verschiedene „Wörter“ mit den Elementen OOTT.

Allgemein gilt:
Die Anzahl der Permutationen von n Elementen, wenn jeweils $n_1, n_2, \ldots, n_k$ Elemente untereinander gleich (äquivalent) sind und

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

gilt, ist

$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_k!}$$

Beispiel 2 Nehmen wir an, Sie wissen, dass ein Computer-Passwort aus den Buchstaben ABAB $*$ CDE besteht. Wie viele mögliche Anordnungen müssen Sie maximal testen, damit das richtige Passwort erraten wird?

Antwort $\frac{8!}{2!2!} = 10080$

8.4 Stichproben ohne Wiederholung

Geordnete Stichproben ohne Wiederholung

Die Auswahl von k Elementen aus einer Menge mit n Elementen in der Weise, dass man die k gewählten Elemente der Reihe nach notiert und für die weitere Wahl außer Betracht läßt, nennt man eine **geordnete Stichprobe ohne Wiederholung vom Umfang k aus n Elementen.**

Frage Wie viele solcher Stichproben vom Umfang $k \leq n$ gibt es?

Antwort — Für die erste Position gibt es n Möglichkeiten, für die zweite Position gibt es $(n-1)$ Möglichkeiten, ..., für die k-te Position gibt es $(n-k+1)$ Möglichkeiten.

Nach dem Zählprinzip also insgesamt

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Möglichkeiten.

*E*s gibt

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

verschiedene geordnete Stichproben ohne Wiederholung vom Umfang k aus n Elementen.

Sonderfall $k=n$ — Dann ist die Anzahl der geordneten Stichproben ohne Wiederholung vom Umfang $k=n$ gleich der Anzahl der Permutationen einer n-elementigen Menge $= n!$ $((n-k)! = (n-n)! = 0! = 1$ für $n=k)$

Beispiel — Ein Profi-Fußballclub hat 26 Spieler unter Vertrag. Wenn der Torwartposten fest vergeben ist, sonst aber jeder der verbleibenden 25 Feldspieler auf jeder Position eingesetzt werden kann, hat der Trainer für die Aufstellung der Mannschaft – unter der Berücksichtigung der Position in der Aufstellung – also die Aufgabe, eine Stichprobe ohne Wiederholung vom Umfang 10 aus 25 Elementen zu ziehen. Unter wie vielen verschiedenen solcher Aufstellungen hat er zu wählen?

Antwort — Es gibt

$$\frac{25!}{(25-10)!} = 16 \cdot 17 \cdots 25 = 11861676290000,$$

also über 11 Billionen verschiedene Mannschaftsaufstellungen. Ein Glück also für den Trainer, wenn seine Spieler nur eingeschränkt tauglich sind und nicht jeder auf jedem Posten verwendbar ist, oder?

Ungeordnete Stichproben ohne Wiederholung

Bei einer **ungeordneten Stichprobe ohne Wiederholung vom Umfang k aus n Elementen** kommt es auf die Position der Elemente innerhalb der Stichprobe nicht an.

Die Anzahl der Stichproben ohne Wiederholung vom Umfang k, die sich nur in der Reihenfolge ihrer Elemente unterscheiden, ist aber gerade $k!$ (vgl. Permutationen).

Damit erhalten wir mit dem Ergebnis des vorangehenden Abschnitts:
*D*ie Anzahl der ungeordneten Stichproben ohne Wiederholung vom Umfang k aus n Elementen ist

$$\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

(Man vgl. auch Binomialkoeffizienten)

Beispiel Wie viele verschiedene Mannschaften gibt es, von denen unser Fußballtrainer eine aufs Feld schicken muss, wenn der Torwart feststeht und er 10 aus 25 Feldspielern auswählen muß? Dabei läßt er die Position in der Aufstellung außer Betracht, weil er weiß, dass seine Spieler sowieso wie ein Hühnerhaufen durcheinander laufen.

Antwort Er kann

$$\binom{25}{10} = \frac{25!}{15!10!} = 3268760$$

verschiedene Mannschaften aufstellen. Ein weiter Weg, die optimale Mannschaft zu finden, nicht wahr?

8.5 Stichproben mit Wiederholung

Geordnete Stichproben mit Wiederholung

Aus n Elementen sollen k Elemente unter Beachtung der Reihenfolge ausgewählt werden. Wiederholungen der gewählten Elemente sind zulässig. Man spricht von einer **geordneten Stichprobe mit Wiederholung vom Umfang k aus n Elementen.** Wie viele verschiedene solcher Stichproben gibt es?

Beispiel Eine schöne und kluge Studentin hat 30 glühende Verehrer. Sie beschließt, über die Dauer eines Jahres je Monat, d. h. 12 mal, mit je einem der Verehrer auszugehen. Wiederholte Treffen mit besonders beeindruckenden Kandidaten sind dabei nicht ausgeschlossen. Aus wie vielen möglichen Abfolgen über das Jahr gesehen kann sie wählen?

Antwort Mit $n = 30$, $k = 12$ ist die Anzahl der geordneten Stichproben mit Wiederholung vom Umfang k aus n Elementen zu zählen. Es gibt:

n Möglichkeiten für die Nummer 1

n Möglichkeiten für die Nummer 2

usw. bis

n Möglichkeiten für die Nummer k

Nach dem Zählprinzip ergeben sich insgesamt n^k, im Beispiel also 30^{12} mögliche Abfolgen.

Die Anzahl der geordneten Stichproben mit Wiederholung vom Umfang k aus einer n-elementigen Menge ist n^k

Ungeordnete Stichproben mit Wiederholung

Aus n Elementen sollen k Elemente ausgewählt werden. Dabei sind Wiederholungen der gewählten Elemente zulässig. Gezählt werden soll die Anzahl der Stichproben, wobei zwischen Stichproben mit den gleichen k Elementen, aber unterschiedlicher Reihenfolge dieser Elemente, nicht unterschieden wird.

Wie viele verschiedene solcher **ungeordneten Stichproben mit Wiederholung vom Umfang k aus n Elementen** gibt es?

Beispiel Bei einer Studentenfeier werden an der Bar 10 verschiedene Getränke in vollen Gläsern angeboten. Der Barkeeper sorgt dafür, dass stets das ganze Getränkesortiment bereitsteht.

Im Laufe der Feier geht der gesellige Bursche Gulp 8-mal an die Bar, um ein Getränk seiner Wahl zu fassen. Er achtet nicht besonders auf gezielte Auswahl, greift mal zu diesem, mal zu jenem Getränk, ohne auf Wiederholung oder Unterschiedlichkeit zu achten.

Am Ende der Feier bekommt er seine Getränkerechnung. Darauf sind die Getränkearten und die jeweilige Häufigkeit des Konsums aufgeführt.

Wie viele verschiedene Rechnungszusammenstellungen sind dabei denkbar?

Anders gesagt: Wie viele ungeordnete Stichproben mit Wiederholung vom Umfang $k = 8$ aus einer Menge mit $n = 10$ Elementen gibt es?

Antwort

Es gibt

$$\binom{10+8-1}{8} = \frac{17!}{8!9!} = 24310$$

verschiedene Rechnungszusammenstellungen, die für den Studiosus Gulp denkbar sind.

Allgemein gilt: *Die Anzahl der verschiedenen ungeordneten Stichproben mit Wiederholung vom Umfang k aus einer n-elementigen Menge beträgt*

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Dies auszurechnen, d.h., zu beweisen, ist etwas schwieriger als bei anderen Formeln vorher. Da man aber viel dabei lernt – wie immer an schwierigen Aufgaben – im folgenden ein Beweis.

Wir gehen davon aus, dass künftige Studenten sicher **Freude, Neugier und Ausdauer** für etwas knifflige Fragen und Argumentationen mitbringen, auch wenn die aktuelle Fragestellung schon über den üblichen Schulstoff hinausführen mag.

Beweis des Satzes

Die Anzahl der verschiedenen ungeordneten Stichproben mit Wiederholung vom Umfang k aus einer n-elementigen Menge beträgt

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Wir bezeichnen die gesuchte Anzahl mit $A(n,k)$.
In der Sprache des Beispiels mit dem Studenten Gulp stellen wir uns seine Rechnung so vor, dass die n Getränkesorten mit $G_1, G_2, \ldots, G_n$ durchnummeriert waren und auf der Rechnung die konsumierten Getränke nach ansteigender Getränkenummer aufgeführt sind; z.B. 5-mal Getränk G_2, 2-mal Getränk G_4, 1-mal Getränk G_7, wenn Gulp auf die Sorten G_1, G_3, G_5, G_6 und $G_8 - G_{10}$ verzichtet hat (mit $n = 10$, $k = 8$ im Beispiel).

Wir beweisen nun die Formel mit vollständiger Induktion nach k.

Für $k = 1$ gibt es n Möglichkeiten und

$$n = \binom{n+1-1}{1} = \frac{n!}{(n-1)!}.$$

Nun gelte die Formel für Stichproben vom Umfang k, d.h., **für alle** $n \in \mathbf{N}$ **gelte**

$$A(n,k) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Wir zeigen

$$A(n,k+1) = \binom{n+k}{k+1} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbf{N}$$

Wir bleiben in der Sprache des Beispiels. Gulp hatte $k+1$ Getränke.

1. Fall: Taucht als erster Posten die Sorte G_1 auf der Rechnung auf, dann hat Gulp mindestens 1-mal von G_1 gekostet. Die restlichen k Getränke könnte er aus allen verfügbaren Sorten gewählt haben. In diesem Fall gibt es dann also $A(n,k)$ verschiedene Möglichkeiten von Rechnungen.

2. Fall: Taucht als erster Posten die Sorte G_2 auf der Rechnung auf, dann hat Gulp mindestens 1-mal von G_2 getrunken. Die restlichen k Getränke hat er aus den $n-1$ Sorten G_2 bis G_n gewählt. In diesem Fall gibt es dann also $A(n-1,k)$ verschiedene Möglichkeiten von Rechnungen – auch verschieden von allen Möglichkeiten im Fall 1.

usw. bis

n-ter Fall: Gulp hat nur das Mineralwasser G_n getrunken, dann gibt es nur eine mögliche Rechnung:

$$1 = A(1,k) = \binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1}.$$

$A(n,k+1)$ **ist die Summe aller dieser Anzahlen:**

$$\begin{aligned} A(n,k+1) &= A(n,k) + A(n-1,k) + \ldots + A(2,k) + A(1,k) \\ &= \binom{n+k-1}{k} + \binom{n+k-2}{k} + \ldots + \binom{k+1}{k} + \binom{k}{k} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \binom{n+k-i}{k}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Formeln

$$\binom{m}{i} = \binom{m+1}{i+1} - \binom{m}{i+1} \quad \text{und} \quad \binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1}$$

für die Binomialkoeffizienten (vgl. Abschnitt 4) kann man **diese Summe ausrechnen**:

$$\begin{aligned} A(n,k+1) = &\left[\binom{n+k}{k+1} - \binom{n+k-1}{k+1}\right] + \left[\binom{n+k-1}{k+1} - \binom{n+k-2}{k+1}\right] \\ &+ \ldots + \left[\binom{k+2}{k+1} - \binom{k+1}{k+1}\right] + \binom{k+1}{k+1} \\ = &\binom{n+k}{k+1}. \end{aligned}$$

Es bleibt nur der erste Summand der rechten Seite übrig, alle anderen addieren sich zu Null. Dies ist das gewünschte Ergebnis.

8.6 Anzahl Teilmengen

Frage — Wie viele verschiedene Teilmengen besitzt eine n-elementige Menge?

Beispiel — Die Menge $M = \{a, b, c\}$ hat die Teilmengen: $\emptyset$ leere Menge, M selbst, $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$, also 8 Teilmengen, d.h. 2^3 Stück.

Allgemein gilt: *Eine n-elementige Menge besitzt 2^n Teilmengen*

Zum Beweis zählt man die leere Menge mit Null Elementen, die 1-elementigen, 2-elementigen Teilmengen usw. Insgesamt erhält man also (vgl. ungeordnete Stichproben ohne Wiederholung)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \quad \text{Teilmengen.}$$

(vgl. Abschnitt 4: Binomialsatz für $(x + y)^n$ mit $x = 1, y = 1$)

8.7 Anwendungsbeispiele

Binomialsatz

Der Binomialsatz lautet:
Für je zwei reelle Zahlen a und b und jede natürliche Zahl n gilt

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k$$

Ein kombinatorischer Beweis — Wir schreiben als „Trick“ x_0 statt a und x_1 statt b. Multiplizieren wir dann die Potenzen der linken Seite für $n = 2$, $n = 3$ usw. aus, erhalten wir

$$\begin{aligned}(x_0 + x_1)^2 &= x_0x_0 + x_0x_1 + x_1x_0 + x_1x_1,\\ (x_0 + x_1)^3 &= x_0x_0x_0 + x_0x_0x_1 + x_0x_1x_0 + x_1x_0x_0\\ &\quad + x_0x_1x_1 + x_1x_1x_0 + x_1x_0x_1 + x_1x_1x_1\end{aligned}$$

Hieraus wird klar, dass sich jede n-te Potenz der Summe $x_0 + x_1$ als Summe von Produkten der Form $x_{k_1}x_{k_2}\cdots x_{k_n}$ mit der Länge n schreiben läßt.

Diese Summe hat dann 2^n Summanden=Anzahl der geordneten Stichproben mit Wiederholung vom Umfang n aus der 2-elementigen Menge $\{0, 1\}$.

Für die auftretenden Kombinationen der k_i gilt

$$k_i \in \{0, 1\} \text{ für } i = 1, \ldots, n$$
$$k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k \text{ für } k = 0, 1, \ldots, n$$

Dies zeigt man leicht mit vollständiger Induktion.

Daher erhält man:

$$\begin{aligned}
(x_0+x_1)^n &= \sum_{k_1,k_2,\ldots k_n\in\{0,1\}} x_{k_1}x_{k_2}\cdots x_{k_n} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_n\in\{0,1\},k_1+k_2+\ldots+k_n=k} x_{k_1}x_{k_2}\cdots x_{k_n} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_n\in\{0,1\},k_1+k_2+\ldots+k_n=k} x_0^{n-k}\cdot x_1^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_{n,k}\; x_0^{n-k}x_1^k,
\end{aligned}$$

Jeder Summand der Form $x_0^k x_1^{n-k}$ kommt nämlich so oft vor, wie es „Wörter“ der Länge n gibt mit genau k Buchstaben x_0 und $n-k$ Buchstaben x_1. Diese Anzahl $C_{n,k}$ ist gerade

$$C_{n,k} \;=\; \binom{n}{k}\,,$$

und damit ist der Binomialsatz gezeigt.

Laplace-Experimente

Zufallsexperimente mit endlich vielen Ergebnissen, von denen jedes gleichwahrscheinlich ist, nennt man **Laplace-Experimente** (P. S. Laplace 1745–1827).

Ist die Ergebnismenge $M = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, dann nennt man die Potenzmenge $\{E \mid E \subset M\}$ von M die Menge aller Ereignisse. Die Mengen $\{e_k\}$, $k = 1, \ldots, n$, heißen **Elementarereignisse**.

Hat M n Elemente, dann haben die Ereignisse $E \subset M$ bei einem Laplace-Experiment die Wahrscheinlichkeiten

$$p(E) = \frac{|E|}{|M|} = \frac{\text{Anzahl der Elemente von } E}{n}$$

insbesondere gilt also

$$p(\{e_k\}) = \frac{1}{n}$$

für alle $k = 1, 2, \ldots n$

Beispiel 1 Zweimaliger Münzwurf mit den Einzelergebnissen Z (Zahl) oder K (Kopf) hat als Ergebnismenge M des zugehörigen Laplace-Experiments

$$M = \{(Z,Z),(Z,K),(K,Z),(K,K)\}$$

Das Ereignis E = Ergebnis mit zwei verschiedenen Seiten ist daher

$$E = \{(Z,K),(K,Z)\}$$

und hat die Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{|E|}{|M|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Beispiel 2 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Lotto (6 aus 49) genau 5 Richtige zu tippen, wenn es ein Laplace-Experiment ist?

Lösung Die Ergebnismenge besteht aus allen 6-elementigen Teilmengen der Menge $G = \{1, 2, \dots, 49\}$ hat also

$$\binom{49}{6} = 13983816 \quad \text{Elemente.}$$

Das Ereignis $E =$ „5 Richtige" besteht aus allen Teilmengen, die genau 5 der 6 richtigen Glückszahlen enthalten. Das 6. Element jeder dieser Teilmengen kann irgendeine der restlichen 43 nicht gezogenen Zahlen sein. Um die Elemente von E zu erhalten, muss man also auf jede mögliche Weise 5 aus den 6 richtigen Zahlen auswählen und für jede solche Wahl noch auf 43 mögliche Arten zu einer 6-elementigen Menge ergänzen. Daher ist die Anzahl $|E|$ der Elemente von E (vgl. ungeordnete Stichproben mit Wiederholung)

$$|E| = \binom{6}{5} \cdot 43 = \frac{6!43}{5!1!} = 258.$$

Die Wahrscheinlichkeit von E ist daher

$$p(E) = \frac{258}{13983816} \approx 0,002\,\%.$$

Beispiel 3 Ein Zug hat n Wagen und jeder davon mindestens k Sitzplätze. k Personen besteigen diesen Zug. Es gelte $k \leq n$. Wie groß ist die Laplace-Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $E =$ In jedem Wagen steigt höchstens einer der k Passagiere zu?

Lösung Die erste Person hat n Möglichkeiten, die zweite Person $(n-1)$ Wagen zur Wahl, usw. Die Menge M aller möglichen Zuordnungen der k Passagiere zu den n Wagen hat n^k Elemente. Die Menge E hat $n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$ Elemente. Daher gilt

$$p(E) = \frac{n!}{(n-k)!n^k}$$

(vgl. geordnete Stichproben ohne Wiederholung und geordnete Stichproben mit Wiederholung)

Binomialverteilung

Eine Grundmenge G mit N Elementen enthalte M Elemente mit einer Eigenschaft D und $N - M$ (restliche) Elemente ohne diese Eigenschaft. Aus dieser Menge G wird eine ungeordnete Stichprobe mit Zurücklegen vom Umfang n zufällig gezogen.

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in dieser Stichprobe vom Umfang n genau k Elemente die Eigenschaft D besitzen.

Beispiel 1 Eine Urne enthält 4 schwarze und 6 weiße Kugeln $(N = 10, M = 4)$. Man zieht zufällig 5 Mal eine Kugel aus der Urne $(n = 5)$, wobei die Kugel vor dem nächsten Ziehen wieder zurückgelegt wird. Wie groß ist die Laplace-Wahrscheinlichkeit 3 schwarze und 2 weiße Kugeln bei diesem Experiment zu ziehen?

Wenn es, wie vorausgesetzt, ein Laplace-Experiment ist, ist die Wahrscheinlichkeit, ein Element mit der Eigenschaft D („Kugel ist schwarz“) zu ziehen, jedesmal

$$p = \frac{M}{N} = \frac{4}{10}.$$

Analog ist die Wahrscheinlichkeit q, ein Element ohne Eigenschaft D („Kugel ist weiß“) zu ziehen,

$$q = \frac{N-M}{N} = 1 - p = \frac{6}{10}.$$

Beim Entnahmemodell „Ziehen mit Zurücklegen“ nimmt man an, dass es sich um eine Folge sog. **unabhängiger Versuche** handelt, bei der für aufeinanderfolgende Ereignisse E_1, E_2 gilt

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2).$$

Die Wahrscheinlichkeit, bei den ersten k Ziehungen Elemente mit der Eigenschaft D zu ziehen und bei den restlichen Ziehungen $n-k$ Elemente ohne Eigenschaft D zu ziehen, ist dann

$$p^k q^{n-k} = p^k (1-p)^{n-k}.$$

Da aber die Reihenfolge, in der die Elemente gezogen werden, keine Rolle spielen soll, führen die

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Permutationen zum gleichen Stichprobenergebnis. (vgl. Permutationen von n Elementen, wenn jeweils k und $n-k$ Elemente untereinander gleich (äquivalent) sind)

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit, beim Ziehen mit Zurücklegen genau k Elemente mit Eigenschaft D zu erhalten, wenn wir n-mal ziehen, ist daher

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{mit} \quad p = \frac{M}{N}.$$

Derartige Zufallsgrößen X, die beim n-maligen Ziehen mit Zurücklegen die Elemente mit der Eigenschaft D zählen, nennt man **binomialverteilt mit den Parametern** n **und** p und notiert $X \sim B(n,p)$.

Lösung Im vorangehenden Beispiel waren $N = 10, M = 4, n = 5, k = 3$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also

$$p(X=3) = \binom{5}{3}\left(\frac{4}{10}\right)^3\left(\frac{6}{10}\right)^2 = 10 \cdot \frac{64}{1000} \cdot \frac{36}{100} = \frac{144}{625} \approx 23\,\%.$$

Beispiel 2 Ein „Laplace-Würfel“ wird 6-mal nacheinander unabhängig geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau einmal die 6 zu würfeln?

Lösung $p(X=1) = \binom{6}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{3125}{7776} \approx 40{,}2\,\%.$

Hypergeometrische Verteilung

Wieder ist eine Grundmenge G mit N Elementen gegeben, von denen genau M eine Eigenschaft D besitzen. Diesmal werde eine Stichprobe **ohne Zurücklegen** vom Umfang n gezogen. Gesucht ist wie vorher die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei genau k gezogene Elemente die Eigenschaft D besitzen.

Beispiel 1 Eine Urne enthält 4 schwarze und 6 weiße Kugeln. Man zieht zufällig 5-mal eine Kugel aus der Urne, wobei die Kugeln vor dem jeweils nächsten Ziehen **nicht** wieder zurückgelegt werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit genau 3 schwarze Kugeln bei diesem Experiment zu ziehen? ($N = 10, M = 4, n = 5, k = 3$, Eigenschaft D: „Kugel ist schwarz “).

1. Aus der M-elementigen Teilmenge A der Elemente mit Eigenschaft D werden ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge k Elemente entnommen.

   Dies ist auf $\binom{M}{k}$ Arten möglich.

2. Aus der Menge $G \setminus A$ werden die restlichen $n-k$ Elemente entnommen.

   Dies ist auf $\binom{N-M}{n-k}$ verschiedene Arten möglich.

Nach dem Zählprinzip gibt es also insgesamt

$$\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}$$

Arten, eine Stichprobe der gewünschten Art zu erhalten. Die Anzahl der Möglichkeiten, aus der N-elementigen Menge G eine ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen vom Umfang n zu ziehen, ist

$$\binom{N}{n}.$$

Daher ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}} = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Ist X die Zufallsgröße, die beim n-maligen Ziehen ohne Zurücklegen die Elemente mit der Eigenschaft D zählt, so gilt also

$$p(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Derartige Zufallsgrößen X nennt man **hypergeometrisch verteilt mit den Parametern N, M und n** und notiert $X \sim H(N, M, n)$.

Lösung Die gesuchte Wahrscheinlichkeit im vorangehenden Beispiel ist (X hypergeometrisch verteilt mit den Parametern $N = 10, M = 4, n = 5$).

$$p(X = 3) = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{10-4}{5-3}}{\binom{10}{5}} = \frac{5}{21} \approx 23,8\,\%.$$

Vergleichen Sie mit dem Ergebnis beim Ziehen **mit** Zurücklegen. Entspricht das Ergebnis Ihrer „Intuition“ beim Ziehen mit bzw. ohne Zurücklegen unter den gegebenen Bedingungen? Vergleichen Sie in beiden Fällen alle Wahrscheinlichkeiten $p(X = 0)$, $p(X = 1)$, …, $p(X = 4)$, $p(X = 5)$. Was fällt Ihnen dabei auf?

Beispiel 2 Ein Diktator hat 30 Leibgardisten. Unter diesen befinden sich jedoch 2 unerkannte Attentäter. Auf Grund eines drohenden Umsturzes beschließt der Herr, in ein Alpenland mit bewährten Bankgeheimnissen zu flüchten. Dazu wählt er 4 seiner Leibwächter als Begleiter zufällig aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er dabei keinen der Attentäter ins neue Domizil mitnimmt?

Lösung

$$p(X = 0) = \frac{\binom{2}{0} \cdot \binom{30-2}{4}}{\binom{30}{4}} = \frac{65}{87} \approx 74,7\,\%.$$

Interessierten Lesern, insbesonderen Studienaspiranten für Informatik oder für Betriebswirtschaft empfehlen wir das Schulbuch von J. Feuerpfeil, F. Heigel und H. Volpert über Stochastik (bsv) zur vertiefenden Vorbereitung auf das Studium ihrer Wahl.

8.8 Kurztest zum Abschnitt Kombinatorik

1. Auf wie viele verschiedene Arten kann man 10 verschiedene Buchstaben anordnen?

2. Wie viele 3-elementige Teilmengen der Ziffern von $0, 1, \ldots, 9$ gibt es?

3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne mit 3 schwarzen und 2 weißen Kugeln beim 3-maligen Ziehen *mit* Zurücklegen als Ergebnis 2 schwarze und 1 weiße Kugel zu erhalten?

4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne mit 3 schwarzen und 2 weißen Kugeln beim 3-maligen Ziehen *ohne* Zurücklegen als Ergebnis 2 schwarze und 1 weiße Kugel zu erhalten?

5. Es gelte $p + q = 1$, $p > 0$, $q > 0$.
   Wie lautet das Ergebnis der Summe

   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad ?$$

   Geben Sie eine Interpretation in der Sprache der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wenn p und q Wahrscheinlichkeiten bedeuten.

8.9 Formelsammlung für den Abschnitt Kombinatorik

1. Zählprinzip:

$$|A_1| = n_1, |A_2| = n_2 \Rightarrow |A_1 \times A_2| = n_1 \cdot n_2$$

2. Anzahl der Teilmengen einer n-elementigen Menge:

$$2^n$$

3. Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge ($k \neq 0$ und $k \neq n$):

$$\binom{n}{k}$$

4. Anzahl der Permutationen einer n-elementigen Menge:

$$n!$$

5. Anzahl der Permutationen von n Elementen, wenn jeweils $n_1, n_2, \ldots, n_k$ Elemente untereinander gleich sind und $n = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k$:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_k!}$$

6. Anzahl der Stichproben vom Umfang k aus einer n-elementigen Menge:

	geordnet	**ungeordnet**
ohne Wiederholung	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$
mit Wiederholung	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$

7. X binomialverteilt mit Parametern n und p:

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

8. X hypergeometrisch verteilt mit Parametern N, M und n:

$$p(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

8.10 Aufgaben (Lösungen im Anhang)

Aufgabe 1 Wie viele „binäre Wörter“ lassen sich aus den 8 Elementen 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1 bilden?

Aufgabe 2 Wie viele zweistellige Zahlen lassen sich mit den Ziffern der Menge $M = \{1, 2, 3, 4\}$ bilden, wenn in einer Zahl jede Ziffer nur einmal vorkommen darf?

Aufgabe 3 Auf einer Bühne befinden sich 10 Lampen, die unabhängig voneinander ein- oder ausgeschaltet werden können. Wie viele verschiedene Beleuchtungsmöglichkeiten gibt es?

Aufgabe 4 Aus einer Urne mit den 26 Buchstaben des Alphabets werden nacheinander zufällig 9 Buchstaben mit Zurücklegen gezogen und der Reihe nach notiert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p, dass dabei das Wort

INGENIEUR

entsteht?

Aufgabe 5

1. Man berechne die Anzahl der Möglichkeiten, 5 nicht unterscheidbare Teilchen auf 8 Zellen zu verteilen.
2. Man berechne die Anzahl der Möglichkeiten, 5 nicht unterscheidbare Teilchen auf 8 Zellen so zu verteilen, dass jede Zelle höchstens ein Teilchen enthält.

Aufgabe 6 Auf einer Party befinden sich 7 Gäste. Jedem der Gäste wird eine Praline angeboten. In der Pralinenschachtel sind insgesamt 12 Pralinen, von denen eine vergiftet ist. Jeder der Gäste isst eine Praline.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass keiner der Gäste vergiftet wird?
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass einer der Gäste die vergiftete Praline isst?
3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Gast, der damit gemeint ist, die vergiftete Praline isst?
4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gast, der nicht gemeint ist, vergiftet wird?

Aufgabe 7 Ein Fragebogen besteht aus 10 Fragen mit jeweils 10 Antwortalternativen, von denen je eine einzige richtig ist. Wie groß ist beim reinen Raten, d.h., bei einer zufälligen Auswahl der Anworten, die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 4 Fragen (5 Fragen) richtig beantwortet werden?

9 Lösungen

Lösungen zum Kapitel „Mathematische Logik“

Lösung der Aufgabe 1 Die Aussage A stehe für „Berlin ist die Hauptstadt Deutschlands.“ (wahr) und die Aussage B für „Die Isar fließt durch Berlin.“(falsch).

Lösung Gesucht sind die jeweiligen Wahrheitswerte (wie man in der Wahrheitstafel leicht ablesen kann):

1. $\neg A$: falsch
2. $A \wedge B$: falsch
3. $A \vee B$: wahr
4. $\neg A \vee B$: falsch
5. $A \Rightarrow \neg B$: wahr
6. $A \Leftrightarrow B$: falsch
7. $A \wedge \neg B$: wahr
8. $A \Leftrightarrow (A \Rightarrow \neg B)$: wahr

Lösung der Aufgabe 2

1. Negieren Sie folgende Aussage:
   A: „Die Sonne scheint und wir gehen ins Schwimmbad.“

Lösung Dies ist eine Aussage vom Typ

$$A: \qquad A_1 \wedge A_2$$

und damit gilt nach DeMorgan:

$$\neg A: \qquad \neg(A_1 \wedge A_2) \Leftrightarrow ((\neg A_1) \vee (\neg A_2))$$

Deshalb lautet $\neg A$: „Die Sonne scheint nicht oder wir gehen nicht ins Schwimmbad“

2. B: „Wenn eine reelle Funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ in $x \in \mathbf{R}$ differenzierbar ist, dann ist f in x auch stetig.“

Lösung Die Aussage ist vom Typ

$$B_1 \Rightarrow B_2,$$

die Kontraposition lautet dann also

$$(\neg B_2) \Rightarrow (\neg B_1),$$

in Worten: „Wenn eine reelle Funktion f an einer Stelle x nicht stetig ist, dann ist f in x nicht differenzierbar.“

Lösung der Aufgabe 3 Welche Aussagen sind, unabhängig von den Wahrheitswerten von A und B, wahr?

1. $A \Leftrightarrow (A \wedge (A \vee B))$

Lösung mit Hilfe der Wahrheitstafel kann man alle Kombinationen durchgehen:

A	B	$A \vee B$	$A \wedge (A \vee B)$	$\Leftrightarrow$	A
w	w	w	w	w	w
w	f	w	w	w	w
f	w	w	f	w	f
f	f	f	f	w	f

Dieser Satz ist also für alle Wahrheitswerte von A und B wahr

2. $(B \Rightarrow A) \Rightarrow B$

Lösung mit Hilfe der Wahrheitstafel kann man alle Kombinationen durchgehen:

A	B	$(B \Rightarrow A)$	$\Rightarrow$	B
w	w	w	w	w
w	f	w	f	f
f	w	f	w	w
f	f	w	f	f

Dieser Satz ist für nicht für alle Wahrheitswerte von A und B wahr, also ist er falsch.

Lösung der Aufgabe 4 Welchen Wahrheitswert haben die folgenden Aussagen, die sich aus Verknüpfungen ergeben, wenn A wahr ist, B und C aber falsche Aussagen sind.

1. $(\neg A) \vee (\neg(B \vee C))$

Lösung In der Wahrheitstafel kann man ablesen:

$(\neg$	$A)$	$\vee$	$(\neg$	$(B$	$\vee$	$C))$
	w			f		f
					f	
f			w			
		w				

Die Aussage hat den Wahrheitswert wahr

2. $((A \wedge B) \vee (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C)$

Lösung Die Aussage hat den Wahrheitswert falsch

Lösung der Aufgabe 5 Vereinfachen Sie folgende Verknüpfungen von Aussagen/Aussageformen:

Mit Hilfe der Sätze kann man vereinfachen:

Lösung

1. $(\neg(A \wedge \neg B) \vee \neg C) \Leftrightarrow$
   $(\neg A \vee \neg(\neg B) \vee \neg C) \Leftrightarrow$
   $(\neg A \vee B) \vee \neg C$

2. $\neg((\neg A \wedge B) \vee \neg C) \Leftrightarrow$
   $\neg(\neg A \wedge B) \wedge \neg(\neg C) \Leftrightarrow$
   $(A \vee \neg B) \wedge C$

Lösung der Aufgabe 6 Welche Wahrheitswerte müssen A, B, C und D haben, damit die folgenden Verknüpfungen wahr sind?

1. $A \wedge [\neg((C \Rightarrow D) \Leftrightarrow B)] \wedge [A \Rightarrow B]$

Lösung Mit Hilfe der Wahrheitstafel kommt man zu diesem eindeutigen Ergebnis:

A	$\wedge\ [\neg($	$(C \Rightarrow D)$	$\Leftrightarrow\ B\ \ )]\wedge$	$[A \Rightarrow B]$
		w		
w		w		w
W(A)=w		f		W(B)=w
		f		
		W(C)=w; W(D)=f		

2. $(\neg(A \Leftrightarrow B)) \wedge B \wedge (B \Leftrightarrow \neg C) \wedge (C \vee D)$

Lösung $W(A) = f$; $W(B) = w$; $W(C) = f$; $W(D) = w$

Lösung der Aufgabe 7 Mit den folgenden Aussagen A, B, C, D und E seien die folgenden logischen Implikationen gegeben:

$$A \Rightarrow (\neg B), (\neg C) \Rightarrow B, C \Rightarrow D, (\neg E) \Rightarrow (\neg D).$$

Alle Implikationen seien wahr. Die Aussage E sei falsch! Welche Wahrheitswerte haben A, B, C, D?

Lösung Mit der Wahrheitstafel erkennt man: $W(A) = falsch$; $W(B) = wahr$; $W(C) = falsch$; $W(D) = falsch$.

Lösung der Aufgabe 8 Für die folgenden Implikationen gelte:

$A \Rightarrow B$	wahr
$A \Leftrightarrow B$	falsch
$(A \vee B) \Rightarrow C$	wahr
$(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg(C \Leftrightarrow D))$	falsch

Welche Wahrheitswerte haben A, B, C, D?

Lösung An der Wahrheitstafel kann man erkennen: $W(A)$ = falsch; $W(B)$ = wahr; $W(C)$ = wahr; $W(D)$ = wahr;

Lösung der Aufgabe 9 Negieren Sie:

1. A: $2 < x^2 \leq 25$

Lösung
A: $\quad 2 < x^2 \leq 25 \Leftrightarrow [(2 < x^2) \wedge (x^2 \leq 25)]$
$\neg A$: $[\neg(2 < x^2) \vee \neg(x^2 \leq 25)] \Leftrightarrow [(2 \geq x^2) \vee (x^2 > 25)]$

2. B: Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $1 + 2 + 3 + \dots n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Lösung

$$B: \quad \bigwedge_{n \in \mathbf{N}} : \ 1 + 2 + 3 + \dots n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\neg B: \quad \bigvee_{n \in \mathbf{N}} :; 1 + 2 + 3 + \dots n \neq \frac{n(n+1)}{2}$$

In Worten: $\neg B$: Es gibt eine natürliche Zahl n, sodass gilt:

$$+1+2+3+\ldots n \neq \frac{n(n+1)}{2}$$

(Anmerkung: B ist wahr, $\neg B$ ist falsch.)

3. C: Für alle positiven Zahlen ε gibt es mindestens eine natürliche Zahl n mit

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right| \leq \varepsilon$$

Lösung

$\neg C$: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, sodass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right| > \varepsilon$$

(Anmerkung: C ist wahr, $\neg C$ ist falsch.)

4. D: Für alle positiven ε existiert mindestens eine natürliche Zahl n_0, sodass für alle $n \geq n_0$ und für alle $0 \leq x \leq 1$ gilt $x^n < \varepsilon$

Lösung

D: $\displaystyle\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n_0 \in \mathbf{N}} \bigwedge_{n \geq n_0} \bigwedge_{0 \leq x \leq 1} x^n < \varepsilon$

$\neg D$: $\displaystyle\bigvee_{\varepsilon>0} \bigwedge_{n_0 \in \mathbf{N}} \bigvee_{n \geq n_0} \bigvee_{0 \leq x \leq 1} x^n \geq \varepsilon$

$\neg D$: Es existiert ein positives ε, sodass für alle natürlichen Zahlen n_0 mindestens ein $n \geq n_0$ und ein x mit $0 \leq x \leq 1$ existiert, sodass gilt: $x^n \geq \varepsilon$.

(Anmerkung: $\neg D$ ist richtig: Wählt man $\varepsilon = 0.5$, $n_0 \in \mathbf{N}$ beliebig, $n = n_0 + 1$, $x = 1 \Rightarrow x^{n_0+1} = 1 > \varepsilon$.)

Lösung der Aufgabe 10

Abhängig vom Wert einer Booleschen Variablen WERT soll in einem Programm verzweigt werden. A, B, C, D, WERT1, WERT2 und WERT seien als Boolesche Variablen deklariert. Zwei Programmierer programmieren – jeder auf seine Weise – WERT wie folgt:

Programmierer 1:

```
WERT:= NOT ((NOT A AND B) OR (C AND D));
```

Programmierer 2:

```
WERT1:= A OR NOT B;
WERT2:= NOT C OR NOT D;
WERT := WERT1 OR WERT2;
```

Hat WERT für alle möglichen Werte der Booleschen Variablen A, B, C und D in beiden Programmen jeweils den gleichen Wert?

Lösung

Programmierer 1:

$$\begin{aligned} \text{WERT} &\Leftrightarrow \neg((\neg A \wedge B) \vee (C \wedge D) \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge B) \wedge \neg(C \wedge D) \\ &\Leftrightarrow (A \vee \neg B) \wedge (\neg C \vee \neg D) \end{aligned}$$

Programmierer 2:

$$\text{WERT} \Leftrightarrow \text{WERT1} \vee \text{WERT2} \Leftrightarrow (A \vee \neg B) \vee (\neg C \vee \neg D)$$

WERT hat also in den Programmen im allgemeinen nicht den gleichen Wahrheitswert.

Lösung der Aufgabe 11 xMy bedeutet: „x ist Mutter von y“ und H sei die Menge aller Menschen. Was bedeutet:

1. $\bigwedge\limits_{y \in H} \bigvee\limits_{x \in H} xMy$

Lösung „Für alle Menschen gibt es eine Mutter.“ oder „Jeder Mensch hat eine Mutter.“

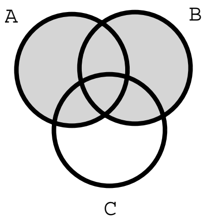
2. $\bigvee\limits_{x \in H} \bigwedge\limits_{y \in H} xMy$

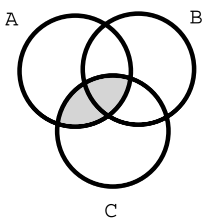
Lösung „Es gibt eine Mutter für alle Menschen.“ oder „Ein Mensch ist die Mutter aller Menschen.“

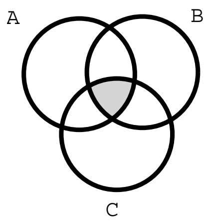
Mit dieser Aufgabe wird gezeigt, dass Quantoren nicht vertauscht werden dürfen!

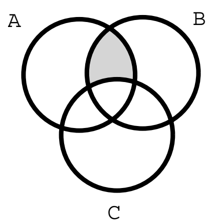
Lösungen zum Kapitel „Mengen“

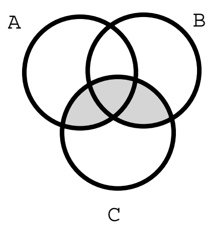
Lösung der Aufgabe 1 A, B, C seien Mengen. Man schraffiere in einem Venn-Diagramm:

1. $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ Lösung: 

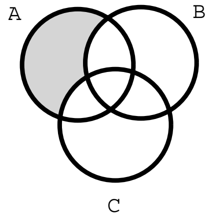
2. $\mathbf{A} \cap \mathbf{C}$ Lösung: 

3. $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}$ Lösung: 

4. $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \setminus \mathbf{C}$ Lösung: 

5. $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap \mathbf{C}$ Lösung: 

6. $\mathbf{A} \setminus (\mathbf{B} \cup \mathbf{C})$ Lösung:



Lösung der Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass für die Mengen

$$\mathbf{A} := \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ Primzahl zwischen 4 und 15 }\}$$
$$\mathbf{B} := \{z \in \mathbf{N} \mid (z^2 - 12z + 35)(z^2 - 24z + 143) = 0\}$$

gilt:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}$$

Lösung $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \{5, 7, 11, 13\}$

Lösungen zum Kapitel „Reelle Zahlen“

Lösung der Aufgabe 1 Man schreibe die Lösungen folgender Ungleichungen als Intervalle:

a) $x^2 < 4 \quad \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2. \quad \mathbf{L} =]-2, 2[$

b) $x^2 \leq 4 \quad \mathbf{L} = [-2, 2]$

c) $x^2 > 4 \quad \Leftrightarrow \neg(x^2 \leq 4). \quad \mathbf{L} =]-\infty, -2[\cup]2, \infty[$

d) $4 + x \leq 5 - 3x \Leftrightarrow x \leq \dfrac{1}{4}. \quad \mathbf{L} = \left]-\infty, \dfrac{1}{4}\right]$

e) $\dfrac{3x-4}{1-x} \leq 2$

Fall 1: $(1 - x) > 0 \wedge 3x - 4 \leq 2(1 - x). \quad \mathbf{L}_1 =]-\infty, 1[$
oder
Fall 2: $(1 - x) < 0 \wedge 3x - 4 \geq 2(1 - x). \quad \mathbf{L}_2 = \left[\dfrac{6}{5}, \infty\right[$

Lösungsmenge $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \cup \mathbf{L}_2$

f) $x^2 - 6x > 7 \quad \Leftrightarrow x^2 - 6x - 7 > 0 \Leftrightarrow (x - 7)(x + 1) > 0$

Fall 1: $(x - 7) > 0 \wedge (x + 1) > 0. \quad \mathbf{L}_1 =]7, \infty[$
oder
Fall 2: $(x - 7) < 0 \wedge (x + 1) < 0. \quad \mathbf{L}_2 =]-\infty, -1[$
Lösungsmenge $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \cup \mathbf{L}_2$

g) $2x^2 - 10x - 14 \leq 2x \quad \Leftrightarrow 2x^2 - 12x - 14 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 7)(x + 1) \leq 0$
$\Leftrightarrow \neg((x - 7)(x + 1) > 0)\,.$
$\mathbf{L} = [-1, 7]$

h) $|-2x| > 4$

Fall 1: $(-2x) \geq 0 \wedge (-2x) > 4. \quad \mathbf{L}_1 =]-\infty, -2[$
oder
Fall 2: $(-2x) < 0 \wedge -(-2x) > 4. \quad \mathbf{L}_2 =]2, \infty[$

Lösungsmenge $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \cup \mathbf{L}_2$

i) $|2x - 3| > 5$

Fall 1: $(2x - 3) \geq 0 \wedge (2x - 3) > 5. \quad \mathbf{L}_1 =]4, \infty[$
oder
Fall 2: $(2x - 3) < 0 \wedge -(2x - 3) > 5. \quad \mathbf{L}_2 =]-\infty, -1[$

Lösungsmenge $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \cup \mathbf{L}_2$

Lösung der Aufgabe 2 Veranschaulichen Sie auf der Zahlengerade:

a) $\mathbf{A} = \left\{ x \in \mathbf{R} \,\middle|\, x \neq \frac{5}{2}, \frac{1-x}{2x-5} < 2 \right\} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \left]-\infty, \frac{11}{5}\right[\cup \left]\frac{5}{2}, \infty\right[$

b) $\mathbf{B} = \{x \in \mathbf{R} \mid |x-3| > 5\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid |x-2| \leq 7\} \Leftrightarrow \mathbf{B} = \mathbf{R}$

Lösung der Aufgabe 3 Man bestimme, falls existent, für folgende Mengen Supremum, Maximum, Infimum und Minimum:

	$\mathbf{A}$	$\sup(\mathbf{A})$	$\max(\mathbf{A})$	$\inf(\mathbf{A})$	$\min(\mathbf{A})$
a)	$[-1, 3[$	3	–	-1	-1
b)	$[-1, 3]$	3	3	-1	-1
c)	$]-1, 3[$	3	–	-1	–
d)	$]-\infty, -2[$	-2	–	–	–
e)	$]0, \infty[= \mathbf{R}^+$	–	–	0	–
f)	$]-\infty, 0] = \mathbf{R}_0^-$	0	0	–	–
g)	$\left\{ x \in \mathbf{R} \,\middle|\, x = \frac{n^2+1}{n^2}, n \in \mathbf{N} \right\}$	2	2	1	–
h)	$\{z \in \mathbf{Z} \mid z = (-1)^n, n \in \mathbf{N}\}$	1	1	-1	-1
i)	$\left\{ x \in \mathbf{Q} \,\middle|\, x = \frac{2}{7^n}, n \in \mathbf{N} \right\}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	0	–

Lösung der Aufgabe 4 Für welche $t \in \mathbf{R}$ hat die Gleichung

$$4x^2 + 8tx - 4t + 24 = 0$$

keine reelle Lösung?

Lösung $x_{1/2} = \dfrac{-8t \pm \sqrt{64t^2 - 16(24-4t)}}{8}$ ist reell für

$$64t^2 - 16(24-4t) \geq 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 6 \geq 0 \Leftrightarrow (t-2)(t+3) \geq 0.$$

Daher die Lösungsmenge

$$\mathbf{L} =]-3, 2[$$

Lösungen zum Kapitel „Produkte, Summen...“

Lösung der Aufgabe 1 Schreiben Sie die ersten und letzten drei Glieder:

a) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = -1+2^2-3^2+\ldots+(-1)^{n-2}(n-2)^2+(-1)^{n-1}(n-1)^2+(-1)^n n^2$

b) $\prod_{k=2}^{n+2} (k-2)! = 0! \cdot 1! \cdot 2! \cdots (n-2)! \cdot (n-1)! \cdot n!$

Lösung der Aufgabe 2 Schreiben Sie mit $\sum$ und $\prod$-Zeichen:

a) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \sum_{n=1}^{7} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

b) $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+\frac{x^8}{40320}=\sum_{k=0}^{4}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$

c) $\frac{11}{4}\cdot\frac{22}{8}\cdot\frac{33}{16}\cdot\frac{44}{32}\cdot\frac{55}{64}\cdot\frac{66}{128}=\prod_{i=1}^{6}\frac{11i}{2^{i+1}}$

Lösung der Aufgabe 3

Berechnen Sie die folgenden Summen (Konvention $a^0 = 1$ für $a \in \mathbf{R}$):

a) $\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{1+(-1)^k}{2}=1+0+1+0+\ldots 1+0=n+1$

b) $\sum_{k=m}^{n}(b_1+c)=(n-m+1)(b_1+c)$

c)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+10}(5-7k)+\sum_{k=1}^{n+9}(7k-2)+6 &= 5-7(n+10)+\sum_{k=1}^{n+9}(5-7k)+\sum_{k=1}^{n+9}(7k-2)+6\\ &= -59-7n+\sum_{k=1}^{n+9}3=-59-7n+3(n+9)\\ &= -32-4n\end{aligned}$$

Lösung der Aufgabe 4

Gegeben ist die Summe $\sum_{i=12}^{22}2^{i-5}$,

Führen Sie eine Indextransformation so durch, dass

a) der allgemeine Summand 2^k lautet:

$k=i-5$ untere Indexgrenze für $i=12$: $k=12-5=7$
obere Indexgrenze für i=22: $k=i-5=22-5=17$

$\sum_{k=7}^{17}2^k$

b) die untere Indexgrenze bei $m=0$ liegt:

$i=m+12$ obere Indexgrenze für $i=22$: $m=22-12=10$
Summand: $2^{i-5}=2^{m+12-5}=2^{m+7}$

$\sum_{m=0}^{10}2^{m+7}$

c) die obere Indexgrenze bei $n=50$ liegt:

$i=n-28$ untere Indexgrenze für $i=12$: $n=12+28=40$
Summand: $2^{i-5}=2^{n-28-5}=2^{n-33}$

$\sum_{n=40}^{50}2^{n-33}$

Test: Jede dieser Summen hat die 11 Summanden $2^7, 2^8, \ldots 2^{17}$.

Lösung der Aufgabe 5 Formen Sie jeweils so um, dass der Summenindex bei Null beginnt:

a) $$\sum_{k=3}^{n} 2^{k-3} x^n = \sum_{k=0}^{n-3} 2^k x^n$$

b) $$\sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} x^{2i} = x^2 \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i x^{2i}$$

Lösung der Aufgabe 6 Berechnen Sie:

a) $$\binom{11}{4} = \frac{11!}{4!(11-4)!} = 330$$

b) $$\binom{4,5}{2} = \frac{4,5(4,5-1)}{2!} = 7,875$$

c) $8! = 40320$

d) $$\binom{850}{847} = \frac{850!}{847!(850-847)!} = \frac{848 \cdot 849 \cdot 850}{3!} = 101993200$$

e) $$\binom{-11}{4} = \frac{-11(-11-1)(-11-2)(-11-3)}{4!} = 1001$$

Lösungen zum Kapitel „Vollständige Induktion “

Lösung der Aufgabe 1 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion

$$\bigwedge_{n \in \mathbf{N}} \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Beweis *(Induktionsanfang)* Richtig für $n = 1$:

$$1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$$

(Induktionsvoraussetzung) Es gelte

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Zu zeigen ist:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

Mit der Induktionsvoraussetzung folgt sofort:

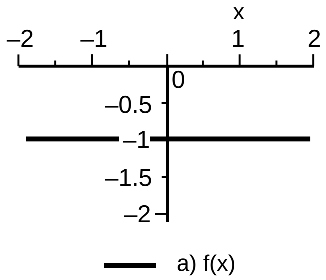
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= (n+1)^3 + \sum_{k=1}^{n} k^3 = (n+1)^3 + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}\end{aligned}$$

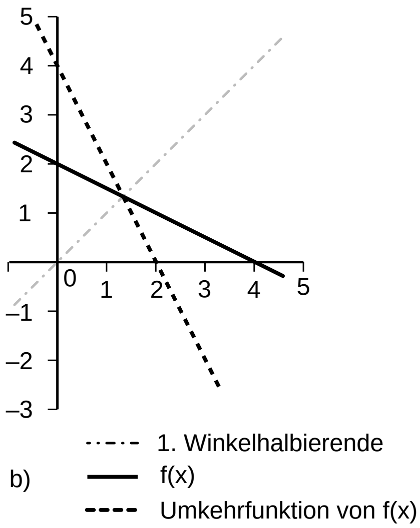
Lösungen zum Kapitel „Abbildungen, reelle Funktionen“

Lösung der Aufgabe 1 Man skizziere folgende Funktionen und untersuche ihre Eigenschaften:

a) $f(x) = -1 \quad \mathbf{D} = \mathbf{R}$

nicht bijektiv, gerade ,beschränkt



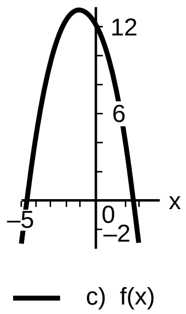


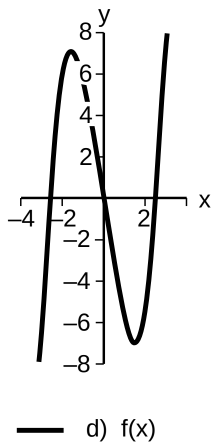
b) $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + 2 \quad \mathbf{D} = \mathbf{R}$

bijektiv, streng monoton fallend, unbeschränkt

c) $f(x) = -x^2 - 2x + 12 \quad \mathbf{D} = \mathbf{R}$

nicht bijektiv, nach oben beschränkt





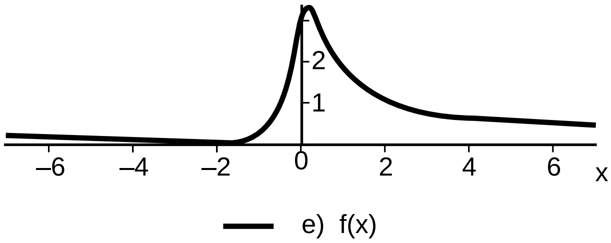
d) $f(x) = x^3 - 7x \quad \mathbf{D} = \mathbf{R}$

nicht bijektiv, unbeschränkt, ungerade

e) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 3}{3x^2 + 1} \quad \mathbf{D} = \mathbf{R}$

unechter Polynombruch (vgl. Abschnitt 6.3, Bsp. 9), beschränkt, Asymptote: $y = \frac{1}{3}$,

nicht bijektiv, keine reellen Nullstellen oder Pole



Lösung der Aufgabe 2 Vereinfachen Sie:

a) $((-2)^3)^{-2} = (-2)^{-6} = 2^{-6}$

b) $((-2)^{-3})^3 = (-2)^{-9} = -2^{-9}$

c) $((-2)^6 - (-2^6)) : (-2^{3^2} - (2^2)^3) = (2^6 + 2^6)\,\mathrm{div}(-2^9 - 2^6) = -\dfrac{2}{9}$

d) $(-2x^n)^4 - ((-2x)^4)^n = 2^4 x^{4n} - 2^{4n} x^{4n} = x^{4n}(16 - 16^n)$

e) $(\dfrac{3x^2}{4y^3} - \dfrac{6x^3}{5y^2} + \dfrac{2x^4}{3y^2}) : \dfrac{3x^3}{2y^2} = \dfrac{3x^2}{4y^3} \cdot \dfrac{2y^2}{3x^3} - \dfrac{6x^3}{5y^2} \cdot \dfrac{2y^2}{3x^3} + \dfrac{2x^4}{3y^2} \cdot \dfrac{2y^2}{3x^3} = \dfrac{1}{2xy} - \dfrac{4}{5} + \dfrac{4x}{9}$

f) $\dfrac{x^k - y^k}{x^k + y^k} + \dfrac{x^k + y^k}{x^k - y^k} = \dfrac{(x^k - y^k)^2 + (x^k + y^k)^2}{(x^k + y^k)(x^k - y^k)} = \dfrac{2(x^{2k} + y^{2k})}{x^{2k} - y^{2k}}$

g) $\sqrt[3]{\dfrac{a^3 + b^3}{8x^6 y^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{a^3 + b^3}}{2x^2 y}$

h) $\sqrt[n]{x^{n+2} y^{2n-1}} = x^{\frac{n+2}{n}} y^{\frac{2n-1}{n}} = xy^2 \sqrt[n]{\dfrac{x^2}{y}}$

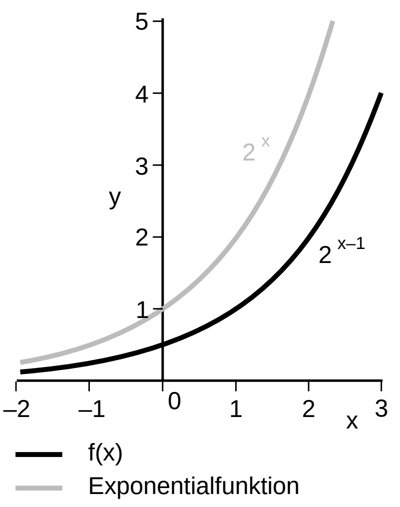
i) $\dfrac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \dfrac{(x - y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$

Lösung der Aufgabe 3 Schreiben Sie mit e- und ln-Funktion:

a) $aq^x = \mathrm{e}^{\ln(aq^x)} = \mathrm{e}^{\ln a + \ln q^x} = \mathrm{e}^{\ln a}\,\mathrm{e}^{x \ln q} = a\,\mathrm{e}^{x \ln q}$

b) $\sqrt{x}^{\sqrt{x}} = \mathrm{e}^{\ln \sqrt{x}^{\sqrt{x}}} = \mathrm{e}^{\sqrt{x} \ln \sqrt{x}} = \mathrm{e}^{0.5\sqrt{x} \ln x} = \sqrt{\mathrm{e}^{\sqrt{x} \ln x}}$

Lösung der Aufgabe 4 Skizzieren Sie die folgende Funktion: $f(x) = 0,5^{-(x-1)} = 2^{x-1}$



Lösung der Aufgabe 5 Skizzieren Sie den Graphen von

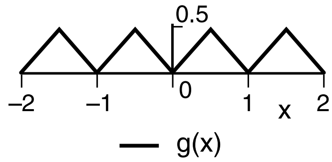
$$g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, g(x) = |x - [x + 1/2]|$$

([.] steht hier für Entierfunktion)

$$\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]: \qquad g(x) = |x - 0| = |x|$$

$$\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]: \qquad g(x) = |x - 1|$$

$$\left[-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right]: \quad g(x) = |x - (-1)| = |x + 1|$$



Die Funktion ist 1-periodisch.

Lösung der Aufgabe 6 Führen Sie die Polynomdivision

$$(2x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 4x + 1) : (x^2 - 3x + 1)$$

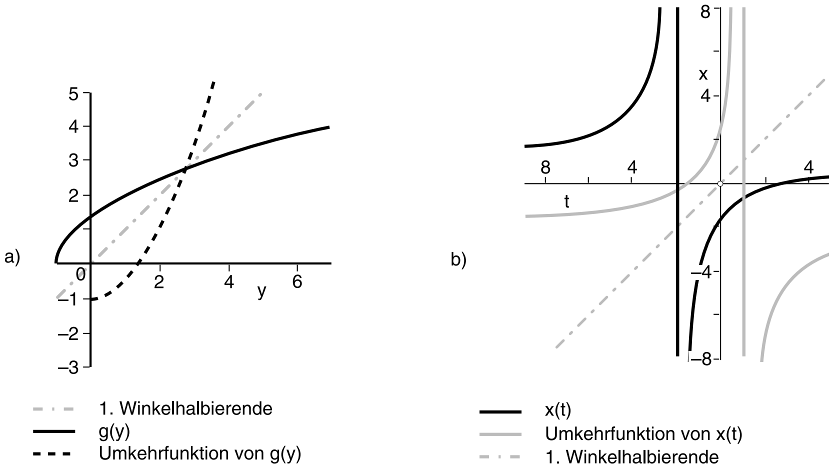
durch.

Lösung $2x^2 + 9x + 30 + \dfrac{77x - 29}{x^2 - 3x + 1}$

Lösung der Aufgabe 7 Finden Sie jeweils die Umkehrfunktion und skizzieren Sie alle Funktionen:

a) $\quad z = g(y) = \sqrt{2y + 2}, (y > -1)$

Auflösen nach y: $g^{-1}(z) = y = \dfrac{1}{2}(z^2 - 2)$.



b) $\quad v = x(t) = \dfrac{t - 3}{t + 2}, (t \neq -2)$

Auflösen nach t: $x^{-1}(v) = t = \dfrac{3 + 2v}{1 - v}, (v \neq 1)$

Lösung der Aufgabe 8 Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

$$\cos\left(-\frac{31\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{31\pi}{4} + 4 \cdot 2\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Lösung der Aufgabe 9 Lösen Sie folgende Gleichung für x:

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = -0,5 \quad \text{mit} \quad x \in \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right]$$

$$\cos(z) = -0,5 \quad \text{mit} \quad z = 2x - \frac{\pi}{2}$$

hat als Lösungen

$$z_1 = \frac{2\pi}{3},\ \ z_2 = \frac{4\pi}{3},\ \ z_3 = \frac{8\pi}{3},\ \ z_4 = \frac{10\pi}{3} \dots$$

$$\frac{5\pi}{4} \le x \le \frac{9\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{5\pi}{4}\cdot 2 - \frac{\pi}{2} \le 2x - \frac{\pi}{2} \le \frac{9\pi}{4}\cdot 2 - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2\pi \le z \le 4\pi$$

Damit erhält man die Lösungen x_1, x_2 im angegebenen Intervall $\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right]$

$$z_3\colon\ \frac{8\pi}{3} = 2x_1 - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{19\pi}{12}$$
$$z_4\colon\ \frac{10\pi}{3} = 2x_2 - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x_2 = \frac{23\pi}{12}$$

Lösung der Aufgabe 10 Lösen Sie die Gleichungen:

a) $0,8\sin(x) - 0,7\cos(x+1) = 0\,,$
$0,8\sin(x) - 0,7\left[\cos(x)\cos(1) - \sin(x)\sin(1)\right] = 0\,.$

Für $x \neq (2k-1)\pi/2,\ k \in \mathbf{Z}$, also

$$0,8\frac{\sin(x)}{\cos(x)} - 0,7\left[\cos(1) - \frac{\sin(x)\sin(1)}{\cos(x)}\right] = 0\,,$$
$$[0,8 + 0,7\sin(1)]\tan(x) = 0,7\cos(1)\,.$$

Damit $\tan(x) \approx 0,272 \Leftrightarrow x \approx 0,266 + n\pi, \quad (n \in \mathbf{Z})$

b) $\sin^2(x) - 3\cos(2x) - \cos(x) = -3, \quad \text{mit} \quad x \in [0, 2\pi[,$
$(1-\cos^2(x)) - 3(2\cos^2(x) - 1) - \cos(x) = -3$
$\cos^2(x) + \frac{1}{7}\cos(x) = 1$
$\cos(x) = \frac{-1-\sqrt{197}}{14} < -1 \quad \text{oder} \quad \cos(x) = \frac{-1+\sqrt{197}}{14}$
Daher gesuchte Lösungen in $[0, 2\pi[$

$$x_1 \approx 0,37\,,\ \ x_2 \approx -0,37 + 2\pi \approx 5,91$$

Lösung der Aufgabe 11 Ein Strom $i(t)$ sei durch Überlagerung sinusförmiger Schwingungen in der Form

$$i(t) = 2A\sin(\omega t) + 2,5A\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) - 4A\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

gegeben. Stellen Sie $i(t)$ in der Form

$$i(t) = \hat{\imath}\sin(\omega t + \phi)$$

dar.

Lösung

$$\begin{aligned} i(t) &= 2A\sin(\omega t) + 2,5A\Big[\cos(\omega t)\cos\Big(\frac{\pi}{3}\Big) - \sin(\omega t)\sin\Big(\frac{\pi}{3}\Big)\Big] \\ &\quad - 4A\Big[\sin(\omega t)\cos\Big(\frac{-\pi}{4}\Big) + \cos(\omega t)\sin\Big(\frac{-\pi}{4}\Big)\Big] \\ &= \sin(\omega t)\Big[2 - 2,5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\Big]A + \cos(\omega t)\Big[2,5\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\Big]A \\ &\approx -3A\sin(\omega t) + 4A\cos(\omega t) \end{aligned}$$

$$\hat{\imath} \approx \sqrt{(-3)^2 + 4^2}A = 5A, \quad \cos(\phi) \approx -\frac{3}{5} \Rightarrow \phi \approx \arccos\Big(-\frac{3}{5}\Big) \approx 2,2$$

Lösung der Aufgabe 12 Wie lauten die Polarkoordinaten (r, ϕ) mit $r \geq 0, -\pi < \phi \leq \pi$ der Punkte mit den kartesischen Koordinaten

Kartesische Koordinaten (x, y)	Polarkoordinaten (r, ϕ)
$(2, 1)$	$\approx (2,236; 0,464)$
$(-2, 1)$	$\approx (2,236; 2,678)$
$(2, -1)$	$\approx (2,236; -0,464)$
$(-2, -1)$	$\approx (2,236; -2,678)$

Benutzen Sie Ihren Taschenrechner zur Umrechnung.

Lösungen zum Kapitel „Vektorrechnung"

Lösung der Aufgabe 1 Für

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

berechne man

a) $$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) $$5\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix}$$

c) $$2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \\ -24 \end{pmatrix}$$

d) $|\mathbf{a}| = \sqrt{13} \approx 3.61$

e) $|\mathbf{b}| = \sqrt{37.25} \approx 6.10$

f) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{16.25} \approx 4.03$
Bestätigung der Dreiecks-Ungleichung: $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \geq |\mathbf{a} + \mathbf{b}| \Rightarrow 9.71 \geq 4.03$

Lösung der Aufgabe 2 Bezüglich einer kartesischen Basis seien

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Welche Winkel schließen die Vektoren ein?
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, $\quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 2;\ |\mathbf{a}| = \sqrt{20};\ |\mathbf{c}| = \sqrt{2};$
$\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = \dfrac{2}{\sqrt{20}\sqrt{2}} \approx 0.32 \Leftrightarrow \angle(\mathbf{a}, \mathbf{c}) \approx 1.25$ (in Bogenmaß) $\approx 71.57°$ (in Gradmaß)
$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 2;\ |\mathbf{b}| = \sqrt{61};\ |\mathbf{c}| = \sqrt{2};$
$\cos \angle(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \dfrac{2}{\sqrt{61}\sqrt{2}} \approx 0.18 \Leftrightarrow \angle(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \approx 1.39$ (in Bogenmaß) $\approx 79.57°$ (in Gradmaß)

b) Berechnen Sie die Winkel von $\mathbf{b}$ mit der x-, y-, und z-Achse.

$\cos\angle(\mathbf{b},\mathbf{e}_1) = \frac{6}{\sqrt{61}} \Leftrightarrow \angle(\mathbf{b},\mathbf{e}_1) \approx 0.69$ (in Bogenmaß) $\approx 39.80°$ (in Gradmaß)

$\cos\angle(\mathbf{b},\mathbf{e}_2) = \frac{3}{\sqrt{61}} \Leftrightarrow \angle(\mathbf{b},\mathbf{e}_2) \approx 1.18$ (in Bogenmaß) $\approx 67.41°$ (in Gradmaß)

$\cos\angle(\mathbf{b},\mathbf{e}_3) = \frac{4}{\sqrt{61}} \Leftrightarrow \angle(\mathbf{b},\mathbf{e}_3) \approx 1.03$ (in Bogenmaß) $\approx 59.19°$ (in Gradmaß)

Lösung der Aufgabe 3 Wie lautet die orthogonale Zerlegung von $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{a_b} + \mathbf{a_n}$ mit $\mathbf{a_b}$ parallel zu $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{a_n}$ orthogonal zu $\mathbf{b}$?

$$\mathbf{a_b} = \frac{-2+0+1}{\sqrt{1+1}^2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a_n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ -0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 3 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

Lösung der Aufgabe 4 Gegeben seien $\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{F}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) Man bestimme alle Ortsvektoren, die auf $\mathbf{F}_1$ senkrecht stehen.

$$\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{x} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

$$\Rightarrow x_3 = -\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -0.5(x_1 + x_2) \end{pmatrix}, \quad (x_1, x_2 \in \mathbf{R})$$

Die Lösung ist eine **Ebene**, die orthogonal zu $\mathbf{F}_1$ ist.

b) Man gebe alle Ortsvektoren (komponentenweise) an, die auf $\mathbf{F}_1$ und auf $(\mathbf{F}_2 \times \mathbf{F}_3)$ senkrecht stehen.

$$\mathbf{v} = k\mathbf{F}_1 \times (\mathbf{F}_2 \times \mathbf{F}_3)$$

$$\mathbf{v} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad k \text{ reell}$$

Das Ergebnis ist eine Gerade, die orthogonal zu $\mathbf{F}_1$ und $(\mathbf{F}_2 \times \mathbf{F}_3)$ ist.

Lösung der Aufgabe 5 Wie groß ist das Volumen des Parallelepipedes, aufgespannt durch die Ortsvektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

in einem kartesischen Koordinatensystem?
(Alle Komponenten beziehen sich auf m als Längeneinheit.)

Lösung $V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})| = |56|\mathrm{m}^3 = 56\mathrm{m}^3$

Lösungen zum Kapitel „Kombinatorik“

Lösung der Aufgabe 1 Wie viele „binäre Wörter“ lassen sich aus den 8 Elementen 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1 bilden?

$$\frac{8!}{5!3!} = 7 \cdot 8 = 56$$

Lösung der Aufgabe 2 Wie viele zweistellige Zahlen lassen sich mit den Ziffern der Menge $M = \{1, 2, 3, 4\}$ bilden, wenn in einer Zahl jede Ziffer nur einmal vorkommen darf?

$$\frac{4!}{(4-2)!} = 12$$

(geordnete Stichproben ohne Wiederholung vom Umfang 2 aus einer 4-elementigen Menge).

Lösung der Aufgabe 3 Auf einer Bühne befinden sich 10 Lampen, die unabhängig voneinander ein- oder ausgeschaltet werden können. Wie viele verschiedene Beleuchtungsmöglichkeiten gibt es?

$$\sum_{n=0}^{10} \binom{10}{n} = 2^{10} = 1024$$

(Summe aller ungeordneten Stichproben ohne Wiederholung vom Umfang n aus 10 Elementen, wobei $n = 0, 1, \ldots, 10$. (Finsternis auf der Bühne wird hier als „Beleuchtung“) mitgezählt)

Lösung der Aufgabe 4 Aus einer Urne mit den 26 Buchstaben des Alfabets werden nacheinander zufällig 9 Buchstaben mit Zurücklegen gezogen und der Reihe nach notiert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p, dass dabei das Wort

INGENIEUR

entsteht?

$$p = \frac{1}{26^9}$$

Lösung der Aufgabe 5

1. Man berechne die Anzahl der Möglichkeiten, 5 nicht unterscheidbare Teilchen auf 8 Zellen zu verteilen.

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1} \quad \text{mit} \quad n = 8, k = 5$$

$$\text{d.h.} \quad \binom{12}{5} = \binom{12}{7} = 792 \text{ Möglichkeiten}$$

2. Man berechne die Anzahl der Möglichkeiten, 5 nicht unterscheidbare Teilchen auf 8 Zellen so zu verteilen, dass jede Zelle höchstens ein Teilchen enthält.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \text{mit} \quad n = 8, k = 5$$

$$\text{d.h.} \quad \binom{8}{5} = \binom{8}{3} = 56 \text{ Möglichkeiten}$$

In der statistischen Physik nennt man eine Verteilung wie in 1. **Bose-Einstein Statistik**, eine Verteilung wie in 2. **Fermi-Dirac-Statistik**.

Lösung der Aufgabe 6

Auf einer Party befinden sich 7 Gäste. Jedem der Gäste wird eine Praline angeboten. In der Pralinenschachtel sind insgesamt 12 Pralinen, von denen eine vergiftet ist. Jeder der Gäste isst eine Praline.

Die Zufallsgröße X zähle die Anzahl der Gäste, die die vergiftete Praline essen. X kann also die Werte 0 oder 1 haben und ist hypergeometrisch verteilt zu den Parametern $N = 12$, $M = 1$, $n = 7$

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass keiner der Gäste vergiftet wird?

$$p(X = 0) = \frac{\binom{1}{0}\binom{11}{7}}{\binom{12}{7}} = \frac{\binom{1}{0}\binom{11}{4}}{\binom{12}{5}} = \frac{5}{12}$$

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass einer der Gäste die vergiftete Praline isst?

$$p(X = 1) = \frac{\binom{1}{1}\binom{11}{6}}{\binom{12}{7}} = \frac{\binom{1}{1}\binom{11}{5}}{\binom{12}{5}} = \frac{7}{12}$$

3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Gast, der damit gemeint ist, die vergiftete Praline isst?

$$p(\{\text{der tatsächlich gemeinte Gast wird vergiftet}\}) = \frac{1}{12}$$

4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gast, der nicht gemeint ist, vergiftet wird?

$$\frac{7}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

Mit 50 % Wahrscheinlichkeit wird also ein Gast vergiftet, der gar nicht gemeint ist.

Lösung der Aufgabe 7

Ein Fragebogen besteht aus 10 Fragen mit jeweils 10 Antwortalternativen, von denen je eine einzige richtig ist. Wie groß ist beim reinen Raten, d.h., bei einer zufälligen Auswahl der Anworten, die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 4 Fragen (5 Fragen) richtig beantwortet werden?

X sei die Zufallsgröße, welche die Anzahl der richtigen Anwort zählt. Sie ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 10$ und $p = 0{,}1$. Damit

$$\begin{aligned} p(X \geq 4) &= 1 - p(X \leq 3) \\ &= 1 - [p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3)] \\ &= 1 - \left[0,9^{10} + \binom{10}{1} 0,1 \cdot 0,9^9 + \binom{10}{2} 0,1^2 \cdot 0,9^8 + \binom{10}{3} 0,1^3 \cdot 0,9^7\right] \\ &\approx 1,3\,\% \end{aligned}$$

$(p(X \geq 5) \approx 0,16\,\%)$

10 Literaturauswahl

Franz Jehle: Boolsche Algebra, Bayer. Schulbuch-Verlag

Wilhelm Knypers: Mathematik Sekundarstufe II: Einführung Logik, Relationen, Zahlen, Pädagogischer Verlag Schwann

Klaus Dünn: Analysis I,Geometrie, Verlag Gehlen

Klaus Stierhof: Analysis II, Vektorgeometrie, Verlag Gehlen

W. Schirotzek, S. Scholz: Starthilfe Mathematik, Teubner Verlag

K. Meyberg, P. Vachenauer: Höhere Mathematik 1, Springer Verlag

u. a. m.